جامعة قسنطينة
قسم الفيزياء (LMD)

مقياس(فيزياء1)
السنة الجامعية 2008/2009

السلسلة رقم 01 : مراجعة حول الأشعة

- التمرين 01: نعتبر ثلاثة أشعة $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ معطاة هندسيا

1- بين أن عملية جمع الأشعة تبديلية و تجميعية

2- مثل هندسيا علاقة المساواة : $3\vec{A} + 2(\vec{B} - \vec{A}) = \vec{A} + 2\vec{B}$ 3- شكل الأشعة (**المنزل**) :

$\vec{V} = 2\vec{A} - 3\vec{B} + 1/2\vec{C}$ و $\vec{W} = -1/3\vec{A} + 1/4\vec{B} + \vec{C}$

- التمرين 02: في معلم متعامد و متجانس $(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, نعتبر النقطتين $P(2, -1, 3)$ و $Q(5, 1, -1)$

1- مثل هندسيا الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ و أعط مركباته ثم أحسب المسافة بين P و Q

2- مثل في المعلم الشعاع $\overrightarrow{OA}$ المساير لـ $\overrightarrow{PQ}$, و أحسب شعاع واحدته $\vec{U}$

3- مثل الأشعة $\overrightarrow{OA_1}$ ، $\overrightarrow{OA_2}$ و $\overrightarrow{OA_3}$ حيث A_1 و A_2 و A_3 هي مساقط النقطة A على المستويات (Oxy)، (Oxz) و (Oyz)

4- أوجد إحداثيات النقطة B التي تنتمي إلى المستوي (Oxy) بحيث يكون:

أ- الشعاع $\overrightarrow{OB}$ عموديا على الشعاع $\overrightarrow{OA_2}$

ب- الشعاع $\overrightarrow{OB}$ عموديا على الشعاع $\overrightarrow{OA_3}$

ج- الشعاع $\overrightarrow{OB}$ موازيا للشعاع $\overrightarrow{OA_1}$

- التمرين 03: في معلم متعامد و متجانس $(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ بين أن من أجل الشعاع الكيفي $\vec{A}$ لدينا دائما:

أ- $\vec{A} = (\vec{A}.\vec{i})\vec{i} + (\vec{A}.\vec{j})\vec{j} + (\vec{A}.\vec{k})\vec{k}$

ب- $\vec{A} = \|\vec{A}\|(\text{Cos}\alpha\, \vec{i} + \text{Cos}\beta\, \vec{j} + \text{Cos}\gamma\, \vec{k})$

حيث α ، β و γ هي الزوايا التي يصنعها $\vec{A}$ على التوالي مع $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (جيوب التمام الموجهة).
ماذا تمثل هذه الجيوب بالنسبة لشعاع الواحدة المرتبط بـ $\vec{A}$

- التمرين 04: لتكن مجموعة الأشعة $\hat{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ، $\hat{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$
و $\hat{C} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

1- أحسب طويلة كل شعاع, و شعاع الواحدة الذي يوافقه

2- أحسب $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ و شعاع واحدته و الزوايا التي يصنعها مع $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

3- أحسب $\hat{U} = 2\hat{A} + \hat{B}$ و $\hat{V} = 3\hat{A} - 5\hat{B}$, و $\hat{W} = \hat{A} - 2\hat{B} + 5\hat{C}$

4- أحسب الجداء السلمي $\hat{U}.\hat{V}$ و $\hat{U}.\hat{W}$ و $\hat{V}.\hat{W}$ ، أحسب الزاويتين $(\hat{U}.\hat{V})$ ، $(\hat{U}.\hat{W})$.

- التمرين 05: لدينا الأشعة: $\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ ، $\vec{B} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{C} = -\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$

1- أحسب الجداء السلمي $\hat{A}.\hat{B}$ ثم استنتج الزاوية $(\hat{A}.\hat{B})$

2- أحسب الجداء ألشعاعي $\hat{V} = \hat{A}$ Ù $\hat{B}$, ثم أستنتج بطريقة أخرى الزاوية $(\hat{A}.\hat{B})$

3- أحسب الجداء المضاعف $(\hat{A}$ Ù $\hat{B})$ Ù $\hat{C}$, $\hat{A}$ Ù $(\hat{B}$ Ù $\hat{C})$, ماذا تستنتج.

4- أحسب الجداء المختلط : $\vec{A}.(\vec{B}$ Ù $\vec{C})$ و $\vec{C}.(\vec{A}$ Ù $\vec{B})$ و $\vec{B}.(\vec{C}$ Ù $\vec{A})$,
ماذا تلاحظ ، هل النتائج المتحصل عليها منتظرة ، ماذا يمثل هذا الجداء.

5- نعرف $\vec{W} = a\vec{i} + b\vec{j} - 3\vec{k}$ ، أوجد a و b لكي يكون $\vec{V}$ و $\vec{W}$ من نفس الاتجاه

- التمرين 06 : ليكن الشعاع : $\vec{U} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$ و النقطتان $A(3, -4, 2)$ و $B(x, y, z)$ ،

1- أوجد إ حداثيات النقطة B بحيث يكون :

أ- $\overrightarrow{AB} \ ^\wedge \ \vec{U}$ ، ماذا تمثل مجموعة هذه النقاط

ب- $\overrightarrow{AB} \ // \ \vec{U}$ ، نفس السؤال السابق

2- أوجد إحداثيات النقطة B حتى يكون : $(\hat{i} - \hat{k}) \ // \ \overrightarrow{AB} \ \text{Ù} \ \hat{U}$ ، $(\hat{k} - \hat{j}) \ ^\wedge \ \overrightarrow{AB} \ \text{Ù} \ \hat{U}$

- التمرين 07 : لتكن الدالة الشعاعية $\hat{V}(t)$ التابعة للزمن : $\hat{V}(t) = Vx(t)\hat{i} + Vy(t)\hat{j} + Vz(t)\hat{k}$

1- بين في الحالة العامة أن : $d\|\hat{V}\|/dt \ ^1 \ \|d\hat{V}/dt\|$ متى تتحقق المساواة

2- بين أن المساواة : $\hat{V}.d\hat{V}/dt = \|\hat{V}\|.d\|\hat{V}\|/dt$ صحيحة مهما كانت عبارة $\hat{V}(t)$

3- إذا كانت $\|\hat{V}\| = Cte$ بين أن $\hat{V}(t) \ ^\wedge \ d\hat{V}(t)/dt$

4- إذا كانت عبارة الدالة $\hat{V}(t)$ من الشكل : $\vec{V}(t) = (3t^2 + 2)\vec{i} + (t^3 - 5)\vec{j} - (3t^2 - 5t)\vec{k}$

أ- أحسب : $d\hat{V}(t)/dt$ و $d^2\vec{V}(t)/dt^2$

ب- أحسب : $\|d\vec{V}/dt\|$ و $d\|\hat{V}\|/dt$ ، ماذا تلاحظ

ج- حالة خاصة: $t = 5s$ ، تحقق من نتيجة السؤال السابق.

التمرين 08 : يعطى الشعاعان $\hat{V} = -a\hat{i} + 2b\hat{j} - g\hat{k}$ و $\hat{W} = (a/2)\hat{i} - b\hat{j} + x\hat{k}$ حيث أن α ,

β و γ ثوابت. حدد قيمة الوسيط x بدلالة هذه الثوابت حتى يكون : $\hat{V} \ // \ \hat{W}$ ، $\hat{V} \ ^\wedge \ \hat{W}$

- التمرين 09 : نعطي مجموعة الأشعة : $\hat{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ و $\hat{B} = -\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$

و $\hat{C} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

1- أحسب $\hat{A}.\hat{B}$, $\hat{A}.\hat{C}$ و $\hat{B}.\hat{C}$

2- أوجد الزاوية $(\vec{A}, \vec{B})$,$(\vec{B}, \vec{C})$

3- أحسب كذلك $\hat{A} \ \text{Ù} \ \hat{B}$ ، $\hat{A} \ \text{Ù} \ \hat{C}$ و $\hat{B} \ \text{Ù} \ \hat{C}$

4- أحسب مساحة متوازيي الأضلاع المشكلين بالأشعة $(\vec{A}, \vec{B})$ و $(\vec{B}, \vec{C})$

5- أحسب الجداء المضاعف $(\hat{A} \ \text{Ù} \ \hat{B}) \ \text{Ù} \ \hat{C}$ ،$\hat{A} \ \text{Ù} \ (\hat{B} \ \text{Ù} \ \hat{C})$ ماذا تستنتج.

6- أحسب الجداء المختلط : $(\vec{A} \ \text{Ù} \ \vec{B}).\vec{C}$ ، $(\vec{B} \ \text{Ù} \ \vec{C}).\vec{A}$ و $(\vec{C} \ \text{Ù} \ \vec{A}).\vec{B}$, ماذا تلاحظ.

- التمرين10: لتكن الأشعة: $\vec{V}_1 = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$ و $\vec{V}_2 = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$

و $\vec{V}_3 = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

1- أوجد إن أمكن قيمة الوسيط α حتى يكون :

- $\alpha\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \ // \ \vec{k}$ ، $\alpha\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \ // \ \vec{j}$

- $\alpha\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \ // \ \vec{i}$ ، $\alpha\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{0}$

2- أحسب الجداءات : $\vec{V}_1.(\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$ ، $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2).\vec{V}_3$

3- أحسب الجداءات : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ و $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3$ و $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$ ثم $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$ و $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3$

4- أحسب الجداء المختلط : $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3$ و $(\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_1$ ، ماذا تلاحظ .

5- أحسب الجداء المضاعف : $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3$ و $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_2)$ ، ماذا تلاحظ .

السلسلة رقم 01 : مراجعة حول الأشعة

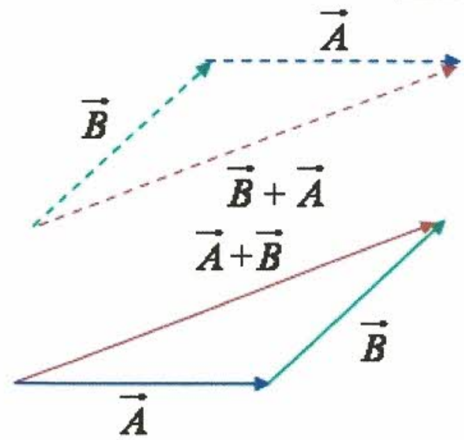
- التمرين 01: نعتبر ثلاثة أشعة $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ معطاة هندسيا

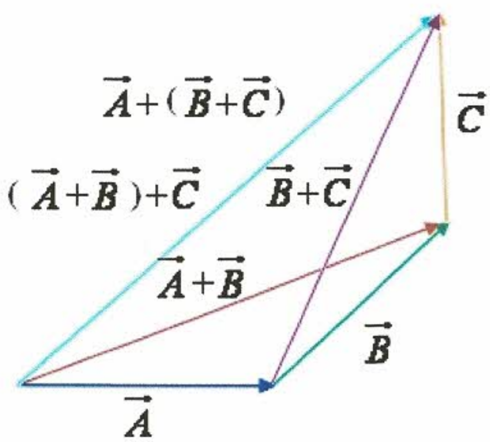
1- بين أن عملية جمع الأشعة تبديلية و تجميعية

2- مثل هندسيا علاقة المساواة : $3\vec{A} + 2(\vec{B} - \vec{A}) = \vec{A} + 2\vec{B}$

3- شكل الأشعة : $\vec{V} = 2\vec{A} - 3\vec{B} + 1/2\vec{C}$ و $\vec{W} = -1/3\vec{A} + 1/4\vec{B} + \vec{C}$

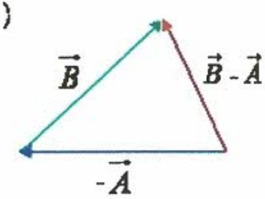
الحل :

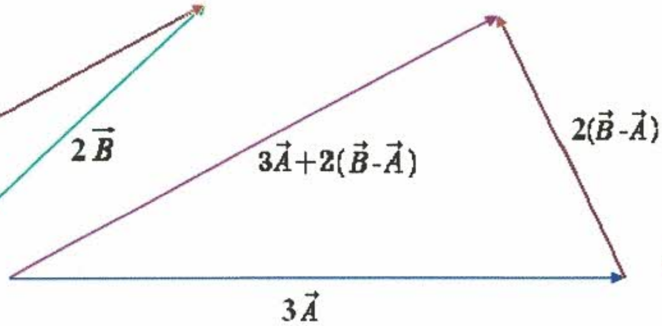


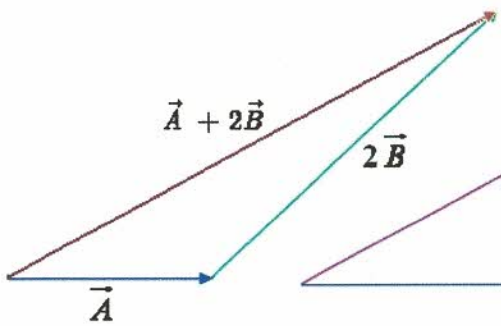


1- عملية جمع الأشعة تبديلية	عملية جمع الأشعة تجميعية

2- التمثيل الهندسي للعلاقة : $3\vec{A} + 2(\vec{B} - \vec{A}) = \vec{A} + 2\vec{B}$







- التمرين 02: في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$، نعتبر النقطتين $P(2,-1,3)$ و $Q(5,1,-1)$

1- مثل هندسيا الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ و أعط مركباته ثم أحسب المسافة بين P و Q

2- مثل في المعلم الشعاع $\overrightarrow{OA}$ المساير لـ $\overrightarrow{PQ}$، و أحسب شعاع واحدته $\vec{U}$

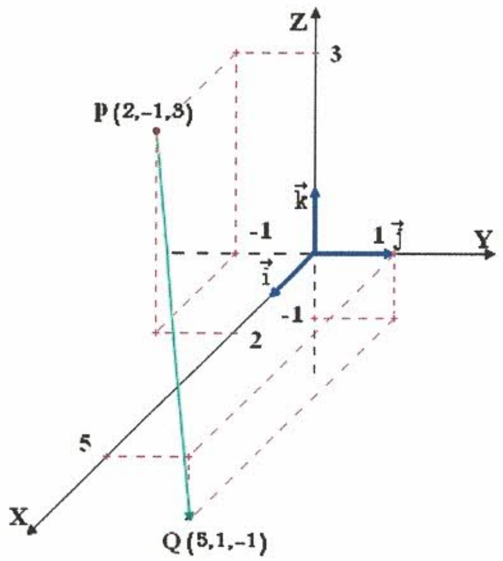
3- مثل الأشعة $\overrightarrow{OA_1}$ ، $\overrightarrow{OA_2}$ و $\overrightarrow{OA_3}$ حيث A_1 و A_2 و A_3 هي مساقط النقطة A على المستويات (Oxy)، (Oxz) و (Oyz)

4- أوجد إحداثيات النقطة B التي تنتمي إلى المستوي (Oxy) بحيث يكون:

أ- الشعاع $\overrightarrow{OB}$ عموديا على الشعاع $\overrightarrow{OA_2}$

ب- الشعاع $\overrightarrow{OB}$ عموديا على الشعاع $\overrightarrow{OA_3}$

ج- الشعاع $\overrightarrow{OB}$ موازيا للشعاع $\overrightarrow{OA_1}$



الحل:

1- مركبات الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ هي :

$$\overrightarrow{PQ}=\begin{Bmatrix} X_Q-X_P \\ Y_Q-Y_P \\ Z_Q-Z_P \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 5-2 \\ 1+1 \\ -1-3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{Bmatrix}$$

و المسافة بين P و Q هي طويلة $\overrightarrow{PQ}$:

$$\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \sqrt{3^2+2^2+4^2} = \sqrt{29}$$

2- الشعاع $\overrightarrow{OA}$ هو نفسه $\overrightarrow{PQ}$ مطبق في النقطة O نحصل على شعاع الواحدة $\vec{U}$:

$$\vec{U}=\frac{\overrightarrow{OA}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|}=\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{29}} \\ \frac{2}{\sqrt{29}} \\ \frac{-4}{\sqrt{29}} \end{pmatrix}$$

3- تكون النقاط : $A_1(3,2,0)$ ¤ $A_2(3,0,-4)$! $A_3(0,2,-4)$ ، وتكون الأشعة :

- $\overrightarrow{OA_1}$ يقع في المستوي (Oxy)
- $\overrightarrow{OA_2}$ يقع في المستوي (Oxz)
- $\overrightarrow{OA_3}$ يقع في المستوي (Oyz)

4- إحداثيات النقطة $B(x,y)$:

ا- $\overrightarrow{OB}$ عمودي على $\overrightarrow{OA_2}$: $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA_2}=(x\vec{i}+y\vec{j}).(3\vec{i}-4\vec{k})=3x=0$

أي $x=0$ و هي تمثل مجموع النقاط التي تنتمي للمحور (Oy)

ب- $\overrightarrow{OB}$ عمودي على $\overrightarrow{OA_3}$: $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA_3}=(x\vec{i}+y\vec{j}).(2\vec{j}-4\vec{k})=2y=0$

أي $y=0$ و هي تمثل مجموع النقاط التي تنتمي للمحور (Ox)

ج- $\overrightarrow{OB}$ موازي $\overrightarrow{OA_1}$: $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OA_1}=\vec{0} \Leftarrow \frac{x}{3}=\frac{y}{2} \Leftarrow 2x-3y=0$

أي تمثل معادلة مستقيم في المستوي (Oxy) ميله 2/3

- التمرين 03: في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ بين أن من أجل الشعاع الكيفي $\vec{A}$ لدينا دائما:

أ- $\vec{A}=(\vec{A}.\vec{i})\vec{i}+(\vec{A}.\vec{j})\vec{j}+(\vec{A}.\vec{k})\vec{k}$

ب- $\vec{A}=\left\|\vec{A}\right\|(\text{Cos}\alpha\,\vec{i}+\text{Cos}\beta\,\vec{j}+\text{Cos}\gamma\,\vec{k})$

حيث α ، β و γ هي الزوايا التي يصنعها $\vec{A}$ على التوالي مع $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (جيوب التمام الموجهة).
ماذا تمثل هذه الجيوب بالنسبة لشعاع الواحدة المرتبط بـ $\vec{A}$

الحل :

ا- نكتب الشعاع $\vec{A}$ على الشكل : $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ ثم نقوم بالجداء السلمي

$\vec{A}.\vec{i} = A_x$ و $\vec{A}.\vec{j} = A_y$ و كذلك $\vec{A}.\vec{k} = A_z$ ، فنحصل على النتيجة

ب- نلاحظ أن : $\|\vec{A}\|\ \text{Cos}\alpha$ ، $\|\vec{A}\|\ \text{Cos}\beta$ و $\|\vec{A}\|\ \text{Cos}\gamma$ تمثل مساقط الشعاع على المحاور الثلاثة ،
أي هي أصلا مركبات الشعاع في هذه القاعدة، فنكتب :

$$\vec{A} = \|\vec{A}\|Cos\alpha\,\vec{i} + \|\vec{A}\|Cos\beta\,\vec{j} + \|\vec{A}\|Cos\gamma\,\vec{k} = \|\vec{A}\|(Cos\alpha\,\vec{i} + Cos\beta\,\vec{j} + Cos\gamma\,\vec{k})$$

α ، β و γ هي الزوايا الموجهة لشعاع الواحدة حسب $\vec{A}$ و جيوب التمام هي مركبات هذا الشعاع

- التمرين 04: لتكن مجموعة الأشعة $\vec{A} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$
و $\vec{C} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$

1- أحسب طويلة كل شعاع, و شعاع الواحدة الذي يوافقه
2- أحسب $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ و شعاع واحدته و الزوايا التي يصنعها مع $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$
3- أحسب $\vec{U} = 2\vec{A} + \vec{B}$ و $\vec{V} = 3\vec{A} - 5\vec{B}$, و $\vec{W} = \vec{A} - 2\vec{B} + 5\vec{C}$
4- أحسب الجداء السلمي $\vec{U}.\vec{V}$ و $\vec{U}.\vec{W}$ و $\vec{V}.\vec{W}$ ، أحسب الزاويتين $(\vec{U}.\vec{V})$ ، $(\vec{U}.\vec{W})$.

الحل :

-1 $\|\vec{A}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$ ، $\vec{U}_A = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}$

$\|\vec{B}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$ ، $\vec{U}_B = \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{j} - \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{k}$

$\|\vec{C}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{29}$ ، $\vec{U}_C = \frac{\vec{C}}{\|\vec{C}\|} = \frac{3}{\sqrt{29}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{29}}\vec{j} + \frac{4}{\sqrt{29}}\vec{k}$

-2 $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 6\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ ، $\vec{U} = \frac{6}{\sqrt{41}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{41}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{41}}\vec{k}$

$Cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{41}}$ ، $Cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{41}}$ و $Cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{41}}$

-3 $\vec{U} = 2\vec{A} + \vec{B} = 5\vec{i} - \vec{k}$ ، $\vec{V} = 3\vec{A} - 5\vec{B} = \vec{i} - 13\vec{j} + 18\vec{k}$

$\vec{W} = \vec{A} - 2\vec{B} + 5\vec{C} = 15\vec{i} - 15\vec{j} + 27\vec{k}$

-4 $\vec{U}.\vec{V} = -13$ ، $\vec{U}.\vec{W} = 48$ و $\vec{V}.\vec{W} = 696$

$$Cos(\vec{U},\vec{V}) = \frac{\vec{U}.\vec{V}}{\|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|} = \frac{-13}{\sqrt{26}.\sqrt{494}} = -0.3742663 \Rightarrow (\vec{U},\vec{V}) = 68°$$

$$Cos(\vec{U},\vec{W}) = \frac{\vec{U}.\vec{W}}{\|\vec{U}\|.\|\vec{W}\|} = \frac{48}{\sqrt{26}.\sqrt{1179}} = -0.274156 \Rightarrow (\vec{U},\vec{W}) = 105.91°$$

- التمرين 05: لدينا الأشعة: $\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ ، $\vec{B} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{C} = -\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$

1- أحسب الجداء السلمي $\vec{A} . \vec{B}$ ثم استنتج الزاوية $(\vec{A} . \vec{B})$

2- أحسب الجداء ألشعاعي $\vec{V}=\vec{A} \wedge \vec{B}$, ثم أستنتج بطريقة أخرى الزاوية $(\vec{A} . \vec{B})$

3- أحسب الجداء المضاعف $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C}$ ،$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$, ماذا تستنتج.

4- أحسب الجداء المختلط : $\vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C})$ و $\vec{C}.(\vec{A} \wedge \vec{B})$ و $\vec{B}.(\vec{C} \wedge \vec{A})$,
ماذا تلاحظ ، هل النتائج المتحصل عليها منتظرة ، ماذا يمثل هذا الجداء.

5- نعرف $\vec{W} = a\vec{i} + b\vec{j} - 3\vec{k}$ ، أوجد a و b لكي يكون $\vec{V}$ و $\vec{W}$ من نفس الاتجاه

الحل :

1- $\vec{A}.\vec{B} = -3$ ، $Cos(\vec{A} , \vec{B}) = \frac{\vec{A} . \vec{B}}{\|\vec{A}\| . \|\vec{B}\|} = \frac{-3}{\sqrt{84}} \Rightarrow (\vec{A} , \vec{B}) = 109.11°$

2- $\vec{V} = \vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$ ، $\left|Sin(\vec{A} , \vec{B})\right| = \frac{\|\vec{A} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{A}\| . \|\vec{B}\|} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{84}}$

$$\Rightarrow (\vec{A} , \vec{B}) = \begin{cases} 70.8934° \\ 180-70.8934=109.1066° \end{cases}$$
أو

3- $\vec{V} = \vec{B}\wedge\vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ، $(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & -5 & -5 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -15 \\ -10 \end{pmatrix}$

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 7 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -19 \\ -1 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن الجداء ألشعاعي غير تجميعي

4- $\vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C}) = (2.7) + (1.3) + (-3.-1) = 20$

$\vec{C}.(\vec{A} \wedge \vec{B}) = (-5.-1) + (-5.1) + (-5.-4) = 20$

سوف نجد نفس الشيء من أجل العلاقة الثالثة، أي أن الجداء المختلط دوري لأنه يمثل حجم متوازي السطوح المشكل من الأشعة الثلاثة.

5- $\vec{V}$ و $\vec{W}$ من نفس الاتجاه، أي هما متوازيان، يعني $\vec{V} \wedge \vec{W} = \vec{0}$:

$$\vec{V}\wedge\vec{W}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -5 & -5 & -5\\ a & b & -3\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}15+5b\\ -5a-15\\ -5b+5a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}b=-3\\ a=-3\\ 0\end{cases}$$

- التمرين 06 : ليكن الشعاع : $\vec{U}=4\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$ و النقطتان $A(3,-4,2)$ و $B(x,y,z)$ ،

1- أوجد إ حداثيات النقطة B بحيث يكون :

أ- $\overrightarrow{AB}\perp\vec{U}$ ، ماذا تمثل مجموعة هذه النقاط

ب- $\overrightarrow{AB}\ //\ \vec{U}$ ، نفس السؤال السابق

2- أوجد إحداثيات النقطة B حتى يكون : $(\overrightarrow{AB}\wedge\vec{U})\ //(\vec{i}-\vec{k})$ ، $(\overrightarrow{AB}\wedge\vec{U})\perp(\vec{k}-\vec{j})$

الحل:

أ- $\overrightarrow{AB}\perp\vec{U}$: $\overrightarrow{AB}.\vec{U}=0$ ، $\overrightarrow{AB}=(X-3)\vec{i}+(Y+4)\vec{j}+(Z-2)\vec{k}$ ،

$\overrightarrow{AB}.\vec{U}=(X-3).4+(Y+4).3-(Z-2).5=0 \Leftarrow 4X+3Y-5Z+10=0$

و العلاقة تمثل معادلة مستوي

ب- $\overrightarrow{AB}\ //\ \vec{U}$: $\Leftarrow \overrightarrow{AB}\wedge\vec{U}=\vec{0}$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\vec{U}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ X-3 & Y+4 & Z-2\\ 4 & 3 & -5\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-5(Y+4)-3(Z-2)\\ 4(Z-2)+5(X-3)\\ 3(X-3)-4(Y+4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-5Y-3Z-14=0\\ 4Z+5X-23=0\\ 3X-4Y-25=0\end{pmatrix}$$

حصلنا على ثلاثة معادلات، اثنتان منها فقط مستقلة وتمثلان معادلتي مستويين، أما الثالثة فهي مجموع : (المعادلة1).4/5 + (المعادلة2).3/5 ، و مجموع النقاط هو المستقيم الناتج عن تقاطع المستويين.

2- الحالة الأولى : $(\overrightarrow{AB}\wedge\vec{U})\ //(\vec{i}-\vec{k})$

$$(\overrightarrow{AB}\wedge\vec{U})\wedge(\vec{i}-\vec{k})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -5Y-3Z-14 & 4Z+5X-23 & 3X-4Y-25\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}5X-4Z+23\\ 3X+4Y-2Z-39\\ 5X-4Z+23\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}5X-4Z+23\\ 3X+4Y-2Z-39\\ 5X-4Z+23\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow 5X-4Z+23=0\ ,\quad 3X+4Y-2Z-39=0$$

نحصل على معادلتي مستويين ، تقاطعهما هو المستقيم الذي يمثل مجموع النقاط B

الحالة الثانية : $\vec{U}\wedge\overrightarrow{AB}\perp(\vec{k}-\vec{j}) \Leftarrow (\vec{U}\wedge\overrightarrow{AB}).(\vec{k}-\vec{j})=0$

$$\vec{U}\wedge\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 3 & -5\\ X-3 & Y+4 & Z-2\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}3(Z-2)+5(Y+4)\\ -5(X-3)-4(Z-2)\\ 4(Y+4)-3(X-3)\end{pmatrix}$$

$$(\vec{U}\wedge\overrightarrow{AB}).(\vec{k}-\vec{j})=\begin{pmatrix}3(Z-2)+5(Y+4)\\ -5(X-3)-4(Z-2)\\ 4(Y+4)-3(X-3)\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\ 5(X-3)+4(Z-2)+4(Y+4)-3(X-3)=0\ \Rightarrow\ 2X+4Y+4Z+2=0$$

و هي تمثل المستوي الذي تنتمي له مجموع النقاط B

- التمرين 07 : لتكن الدالة الشعاعية $\vec{V}(t)$ التابعة للزمن : $\vec{V}(t)=Vx(t)\vec{i}+Vy(t)\vec{j}+Vz(t)\vec{k}$

1- بين في الحالة العامة أن : $\|d\vec{V}/dt\| \neq d\|\vec{V}\|/dt$ متى تتحقق المساواة

2- بين أن المساواة : $\vec{V}.d\vec{V}/dt=\|\vec{V}\|.d\|\vec{V}\|/dt$ صحيحة مهما كانت عبارة $\vec{V}(t)$

3- إذا كانت $\|\vec{V}\|=Cte$ بين أن $\vec{V}(t)\perp d\vec{V}(t)/dt$

4- إذا كانت عبارة الدالة $\vec{V}(t)$ من الشكل : $\vec{V}(t)=(3t^2+2)\vec{i}+(t^3-5)\vec{j}-(3t^2-5t)\vec{k}$

أ- أحسب : $d\vec{V}(t)/dt$ و $d^2\vec{V}(t)/dt^2$

ب- أحسب : $\|d\vec{V}/dt\|$ و $d\|\vec{V}\|/dt$ ، ماذا تلاحظ

ج- حالة خاصة: $t=5s$ ، تحقق من نتيجة السؤال السابق.

الحل :

-1 $\vec{V}(t)=Vx(t)\vec{i}+Vy(t)\vec{j}+Vz(t)\vec{k}\ \Leftarrow\ \dfrac{d\vec{V}(t)}{dt}=\dfrac{dV_x}{dt}\vec{i}+\dfrac{dV_y}{dt}\vec{j}+\dfrac{dV_z}{dt}\vec{k}\ \Leftarrow$

$$\left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\|=\sqrt{\left(\frac{dV_x}{dt}\right)^2+\left(\frac{dV_y}{dt}\right)^2+\left(\frac{dV_z}{dt}\right)^2}\quad \text{و}\quad \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}=\frac{V_x\frac{dV_x}{dt}+V_y\frac{dV_y}{dt}+V_z\frac{dV_z}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dV_x}{dt}\right)^2+\left(\frac{dV_y}{dt}\right)^2+\left(\frac{dV_z}{dt}\right)^2}}$$

يمكن إعادة كتابة العلاقة الأخيرة من الشكل:

$$\Rightarrow\ \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}=\frac{\vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt}}{\|\vec{V}\|}=\frac{\|\vec{V}\|.\left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\|.Cos\left(\vec{V},\frac{d\vec{V}}{dt}\right)}{\|\vec{V}\|}\ \Rightarrow\ \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}=\left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\|.Cos\left(\vec{V},\frac{d\vec{V}}{dt}\right)$$

نلاحظ إذن : $\dfrac{d\|\vec{V}\|}{dt}\neq\left\|\dfrac{d\vec{V}}{dt}\right\|$ و تحدث المساواة إذا كانت الزاوية $\left(\vec{V},\dfrac{d\vec{V}}{dt}\right)=0$ و هي حالة خاصة.

2- لتكن عبارة الجداء السلمي $\vec{V}.\vec{V}=\|\vec{V}\|.\|\vec{V}\|.Cos(\vec{V}.\vec{V})=\|\vec{V}\|.\|\vec{V}\|$ نشتقها فنجد :

$$\frac{d(\vec{V}.\vec{V})}{dt}=\frac{d(\|\vec{V}\|.\|\vec{V}\|)}{dt}=2\ \vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt}=2\,\|\vec{V}\|.\frac{d\|\vec{V}\|}{dt}\ \Rightarrow\ \vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt}=\|\vec{V}\|.\frac{d\|\vec{V}\|}{dt}$$

3- في حالة $\|\vec{V}\|=Cte \Rightarrow \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}=0$

و حسب العلاقة المبرهنة في (2) نجد : $\vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt}=0 \Rightarrow \vec{V}\perp\frac{d\vec{V}}{dt}$

4- لدينا : $\vec{V}(t)=(3t^2+2)\vec{i}+(t^3-5)\vec{j}-(3t^2-5t)\vec{k}$

أ- $\frac{d\vec{V}}{dt}=(6t)\vec{i}+(3t^2)\vec{j}-(6t-5)\vec{k}$ و $\frac{d^2\vec{V}}{dt^2}=6\vec{i}+(6t)\vec{j}-6\vec{k}$

ب- $\left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\|=\sqrt{(6t)^2+(3t^2)^2+(6t-5)^2}$ و

$$\frac{d\|\vec{V}\|}{dt}=\frac{d\left(\sqrt{(3t^2+2)^2+(t^3-5)^2+(3t^2-5t)^2}\right)}{dt}$$

$$=\frac{3.t^5+36.t^3-60.t^2+37.t}{\sqrt{(3.t^2+2)^2+(t^3-5)^2+(3.t^2-5t)^2}}$$

ج- في حالة $t=5s$ نجد أن: $\left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\|=\sqrt{(6.5)^2+(3.25)^2+(6.5-5)^2}=\sqrt{7150}=84.56$

و

$$\frac{d\|\vec{V}\|}{dt}=\frac{3.(5)^5+36.(5)^3-60.(5)^2+37.(5)}{\sqrt{(3.(5)^2+2)^2+((5)^3-5)^2+(3.(5)^2-5(5))^2}}=1.1339496$$

نلاحظ الفرق بين القيمتين .

التمرين 08 : يعطى الشعاعان $\vec{V}=-\alpha\vec{i}+2\beta\vec{j}-\gamma\vec{k}$ و $\vec{W}=(\alpha/2)\vec{i}-\beta\vec{j}+x\vec{k}$

حيث أن α , β و γ ثوابت. حدد قيمة الوسيط x بدلالة هذه الثوابت حتى يكون : $\vec{W}\ //\ \vec{V}$ ، $\vec{V}\perp\vec{W}$

الحل :

- الحالة الأولى : $\vec{V}\ //\ \vec{W} \Rightarrow \vec{V}\wedge\vec{W}=\vec{0} \Rightarrow$

$$X=\frac{\gamma}{2}\Leftarrow 2\beta X-\beta\gamma=0\Leftarrow\vec{V}\wedge\vec{W}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\alpha & 2\beta & -\gamma\\ \alpha/2 & -\beta & X\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}2\beta X-\beta\gamma\\ -\alpha\gamma/2+\alpha X\\ \alpha\beta-\alpha\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

- الحالة الثانية :

$$\vec{V} \perp \vec{W} \Leftarrow \vec{V}.\vec{W} = 0 \Leftarrow (-\alpha\vec{i} + 2\beta\vec{j} - \gamma\vec{k}).(\frac{\alpha}{2}\vec{i} - \beta\vec{j} + x\,\vec{k}) = 0$$

$$\Leftarrow -\frac{\alpha^2}{2} - 2\beta^2 - \gamma X = 0 \Leftarrow X = -\frac{\alpha^2 + 4\beta^2}{2\gamma}$$

تمارين إضافية غير محلولة

- التمرين 09 : نعطي مجموعة الأشعة : $\vec{A} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ و $\vec{B} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$
و $\vec{C} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$

1- أحسب $\vec{A}.\vec{B}$, $\vec{A}.\vec{C}$ و $\vec{B}.\vec{C}$

2- أوجد الزاوية $(\vec{A},\vec{B})$ $(\vec{B},\vec{C})$,

3- أحسب كذلك $\vec{A} \wedge \vec{B}$ ، $\vec{A} \wedge \vec{C}$ و $\vec{B} \wedge \vec{C}$

4- أحسب مساحة متوازيي الأضلاع المشكلين بالأشعة $(\vec{A},\vec{B})$ و $(\vec{B},\vec{C})$

5- أحسب الجداء المضاعف $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C}$، $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$, ماذا تستنتج.

6- أحسب الجداء المختلط : $(\vec{A} \wedge \vec{B}).\vec{C}$ ، $(\vec{B} \wedge \vec{C}).\vec{A}$ و $(\vec{C} \wedge \vec{A}).\vec{B}$, ماذا تلاحظ.

- التمرين10: لتكن الأشعة: $\vec{V}_1 = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$ و $\vec{V}_2 = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$
و $\vec{V}_3 = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

1- أوجد إن أمكن قيمة الوسيط α حتى يكون :

- $\alpha\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \,//\, \vec{k}$ ، $\alpha\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \,//\, \vec{j}$
- $\alpha\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \,//\, \vec{i}$ ، $\alpha\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{0}$

2- أحسب الجداءات : $\vec{V}_1.(\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$ ، $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2).\vec{V}_3$

3- أحسب الجداءات : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ و $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3$ و $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$ ثم $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$ و $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3$

4- أحسب الجداء المختلط : $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3$ و $(\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_1$ ، ماذا تلاحظ .

5- أحسب الجداء المضاعف : $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3$ و $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_2)$ ، ماذا تلاحظ .

2009 / 2008

السلسلة رقم 02 : جملة الإحداثيات

- التمرين 01 : مثل في جملة الإحداثيات الديكارتية ، النقطة $M(2\ ,\ 4)$ ، ثم أوجد إحداثياتها في جملة الإحداثيات القطبية و أعد تمثيلها في هذا النظام مع رسم أشعة الواحدة الموافقة لها. مثل كذلك في جملة الإحداثيات القطبية ، النقطة $N(4\ ,\ \pi/3)$ وأشعة واحدتها ، ثم أستخرج إحداثياتها الديكارتية الموافقة.

- التمرين 02 : تتحرك النقطة M على مسارتكتب معادلته في الإحداثيات القطبيةمن الشكل :
$\rho = a.\theta$ ، حيث أن a ثابت موجب ، شكل جدولا تحدد فيه تغير ρ بدلالة θ ثم أرسم هذا المسار في المجال $0 \le \theta \le 2\pi$ ، حدد موقع النقطة $M_0\ (\theta = 2\pi/3)$ وارسم شعاعي الواحدة الموافقين

- التمرين 03 : تعطى في جملة الإحداثيات الديكارتية، النقطة $M(2\ ,\ 3\ ,\ 3)$ ، أوجد في جملة الإحداثيات الأسطوانية عبارة كل من ρ و θ و z ، أكتب عبارة الشعاع $\overrightarrow{OM}$ و أحسب طويلته. مثل كذلك في جملة الإحداثيات الأسطوانية النقطة $N(3\ ,\ \pi/3\ ,\ 4)$ ، ثم أستنتج إحداثياتها الديكارتية الموافقة.

- التمرين 04 : مثل في جملة الإحداثيات الكروية موقع النقطة $(4\ ,\ \pi/3\ ,\ \pi/6)$ و أشعة الواحدة الكروية التابعة لها ، ثم أوجد الإحداثيات الديكارتة الموافقة.
أوجد الإحداثيات الكروية الموافقة للنقطة $N(6\ ,\ 5\ ,\ -3)$ و مثل أشعة الواحدة لها.

- التمرين 05 : تكتب معادلة مسار النقطة المادية M في جملة الإحداثيات الأسطوانية بالعلاقة :
$\rho = Cte$ و $z = a.\theta$ ، حيث أن a ثابت موجب. أرسم هذا المسار من أجل
$0 \le \theta \le 4\pi$. ثم مثل أشعة الواحدة عند النقطة $(\theta_0 = \pi/3)$

- التمرين 06 : 1- أحسب في الإحداثيات الديكارتية مساحة السطح المحصور في المجال :
$$2 \le Y \le 5 \quad و \quad -1 \le X \le +3$$
2- أحسب باستعمال الإحداثيات القطبية محيط و مساحة دائرة نصف قطرها R
3- أحسب في الإحداثيات الكروية مساحة شطر من كرة نصف قطرها R والمحدود بالمجال $0 \le \varphi \le \pi/2$ و $0 \le \theta \le \pi/2$
4- أحسب في نفس الجملة حجم جزء من الكرة و الحصور في المجال : $0 \le \theta \le \pi$ و $0 \le \varphi \le \pi$ ثم استنتج مساحة و حجم هذه الكرة.

- التمرين 07 : ليكن الشعاعان : $\vec{U}_r = \cos q\,\vec{i} + \sin q\,\vec{j}$ و $\vec{U}_q = -\sin q\,\vec{i} + \cos q\,\vec{j}$ حيث :
$q = wt$ و w ثابت موجب
1- أحسب طويلتي الشعاعين ، ماذا تستنتج
2- أحسب الجداءات السلمية $\vec{U}_r \cdot \vec{U}_r$ ، $\vec{U}_r \cdot \vec{U}_q$ و $\vec{U}_q \cdot \vec{U}_q$
3- أحسب $\frac{d\vec{U}_r}{dq}$ ، $\frac{d\vec{U}_q}{dq}$ ، ثم $\frac{d\vec{U}_r}{dt}$ و $\frac{d\vec{U}_q}{dt}$ ماذا تلاحظ ، بين أن : $\frac{d\vec{U}_r}{dt} + w\vec{U}_r = \vec{0}$
5- أحسب الجداءات الشعاعية $\vec{U}_r \wedge \vec{U}_q$ ، $\vec{U}_r \wedge \vec{k}$ ، $\vec{U}_q \wedge \vec{k}$ ، و $\frac{d(\vec{U}_r \wedge \vec{k})}{dt}$

- التمرين 08 : في حالة التمرين **(02)** ارسم شعاعي الواحدة الموافقين عند المواقع
$. q= p/4, p/2, 2p/3, 2p$

كذلك من أجل المسار المعرف بالمعادلة $r = a\sqrt{1-(c/a)^2 . \mathrm{Sin}^2 q}$ ، حيث أن a و b ثابتان موجبان و $e = c/a$ يسمى تباعد المركز و $c^2 = a^2 - b^2$ ، شكل في جدول مجموع قيم θ و ρ الموافقة، أرسم هذا المسارو حدد طبيعته، ماذا يمثل كل من a وb. مثل من أجل: $\theta = 0\ ,\ \pi/3\ ,\ \pi/2\ ,\ 2\pi/3$ أشعة الواحدة التابعة.

أعد نفس السؤال من أجل المعالة القطبية : $r = r_0(1 + \mathrm{Cos}q)$ في المجال $0 \le \theta \le 2\pi$

- التمرين 09 : أعد نفس السؤال**(05)** من أجل المعادلة : $\rho = b.\theta$ و $z = a.\theta$ ، a و b ثابتان موجبان في المجال $0 \le \theta \le 4\pi$. ثم مثل أشعة الواحدة عند النقطة $(\theta_0 = \pi/4)$

سلسلة تمارين حول جملة الإحداثيات

- التمرين 01 : مثل في جملة الإحداثيات الديكارتية ، النقطة (M(2 , 4 ، ثم أوجد إحداثياتها في جملة الإحداثيات القطبية و أعد تمثيلها في هذا النظام مع رسم أشعة الواحدة الموافقة لها. مثل كذلك في جملة الإحداثيات القطبية ، النقطة (N(4 , π/3 وأشعة واحدتها ، ثم أستخرج إحداثياتها الديكارتية الموافقة.

الحل :

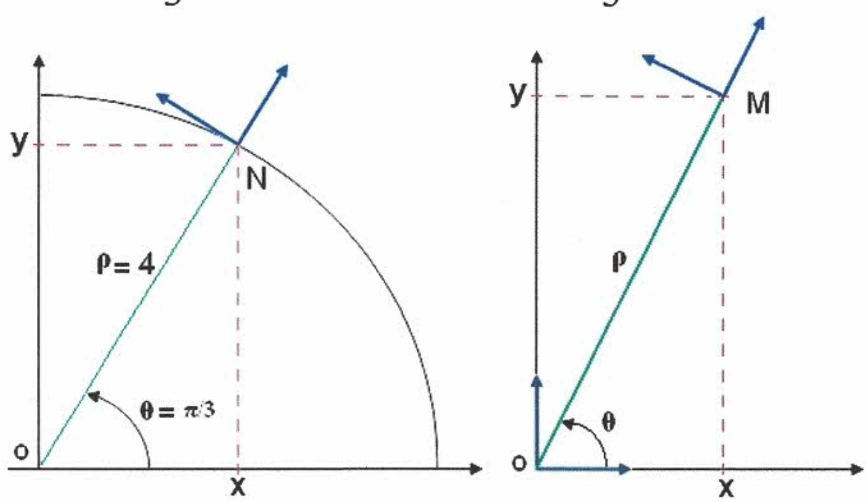
$$tg\theta = \frac{y}{x} \ , \ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Leftarrow \quad \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \rho.\vec{U}_\rho$$

- النقطة (M(2 , 4 :

$$tg\theta = \frac{4}{2} = 2 \ , \ \theta = 63.44° \quad , \quad \rho = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

- النقطة (N(4 , π/3 :

$$y = \rho Sin\theta = 4Cos\frac{\pi}{3} = 2 \ , \ x = \rho Cos\theta = 4Sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$$



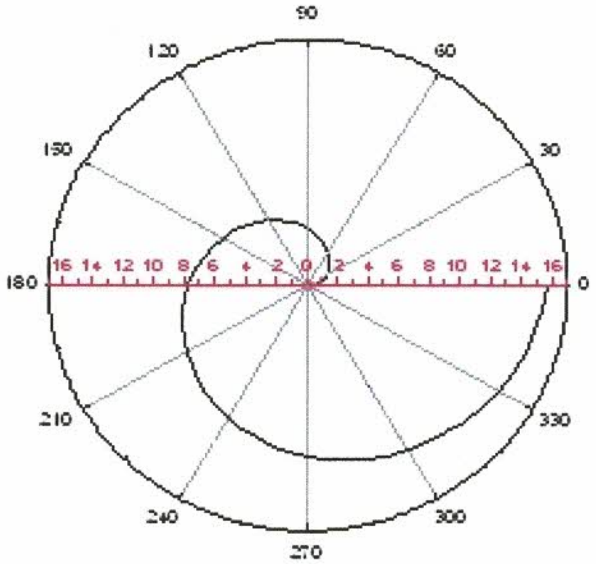
- التمرين 02 : تتحرك النقطة M على مسار معادلته في الإحداثيات القطبية من الشكل : ρ = a.θ ، حيث أن a ثابت موجب، شكل جدول تغير ρ بدلالة θ ثم أرسم هذا المسار في المجال 0 ≤ θ ≤ 2π ، حدد موقع النقطة (M_0 (θ = 2π/3 وارسم شعاعي الواحدة الموافقين.

الحل :

θ	0	π/6	π/4	π/3	π/2	2π/3	3π/4	5π/6	π
ρ	0	aπ/6	πa/4	aπ/3	aπ/2	2aπ/3	3aπ/4	5aπ/6	aπ

7π/6	5π/4	4π/3	3π/2	5π/3	7π/4	11π/6	2π
7aπ/6	5aπ/4	4aπ/3	3aπ/2	5aπ/3	7aπ/4	11aπ/6	2aπ

من الناحية العملية يجب تحديد قيمة الثابت a لكي نستطيع رسم المنحني، نأخذ مثلا a = 2.5 .



θ	ρ
0	0
30	1.309
60	2.618
90	3.927
120	5.236
150	6.545
180	7.854
210	9.163
240	10.472
270	11.781
300	13.09
330	14.399
360	15.708

ـ التمرين 03 : تعطى في جملة الإحداثيات الديكارتية، النقطة $M(2\ ,\ 3\ ,\ 3)$ ، أوجد في جملة الإحداثيات الأسطوانية عبارة كل من ρ و θ و z ، أكتب عبارة الشعاع $\overrightarrow{OM}$ و أحسب طويلته. مثل كذلك في جملة الإحداثيات الأسطوانية النقطة $N(3\ ,\ \pi/3\ ,\ 4)$ ، ثم أستنتج إحداثياتها الديكارتية الموافقة.

الحل :

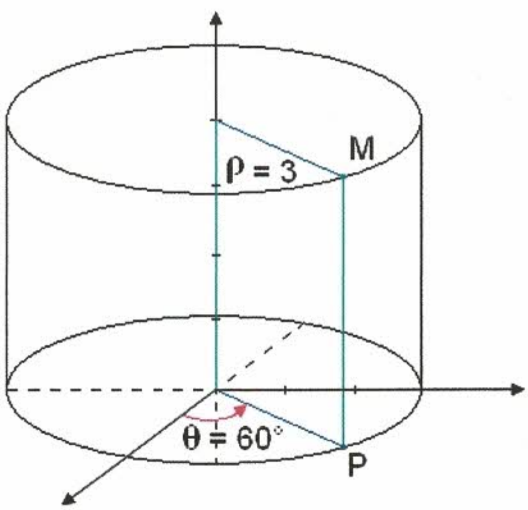
- إيجاد عبارة كل من ρ و θ و z :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$tg\,\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow \theta = arctg\,\frac{3}{2} = 56.31$$ و $z = z$

- $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k} = \sqrt{13}\vec{u}_\rho + 3\vec{k}$, $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{4+9+9} = \sqrt{22}$

- مثل النقطة $N(3\ ,\ \pi/3\ ,\ 4)$:



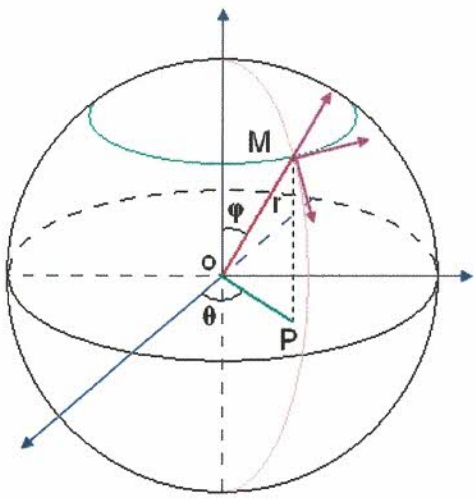
$$x = \rho.Cos\theta = 3Cos\frac{\pi}{3} = 1.5$$

$$y = \rho.Sin\theta = 3Sin\frac{\pi}{3} = 1.5\sqrt{3}$$

$$z = 4$$

ـ التمرين 04 : مثل في جملة الإحداثيات الكروية موقع النقطة $M(4\ ,\ \pi/3\ ,\ \pi/6)$ و أشعة الواحدة الكروية التابعة لها ، ثم أوجد الإحداثيات الديكارتية الموافقة.
أوجد الإحداثيات الكروية الموافقة للنقطة $N(6\ ,\ 5\ ,\ -3)$ و مثل أشعة الواحدة لها.

الحل :



ـ إحداثيات النقطة M :

$$x = rSin\varphi Cos\theta = 4Sin\frac{\pi}{6}Cos\frac{\pi}{3} = 1$$

$$y = rSin\varphi Sin\theta = 4Sin\frac{\pi}{6}Sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$z = rCos\varphi = 4Cos\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}$$

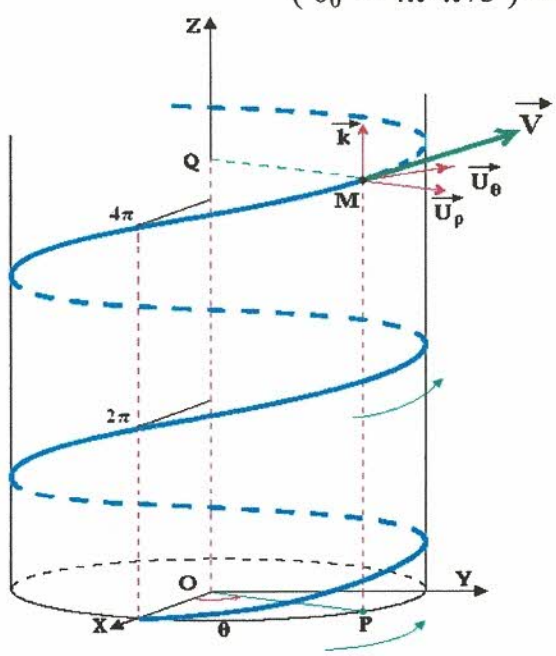
ـ إحداثيات النقطة N :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{36+25+9} = \sqrt{70}$$

$$\theta = artg\left(\frac{y}{x}\right) = artg\left(\frac{5}{6}\right) = 39.81° \quad , \quad \varphi = arCos\left(\frac{z}{r}\right) = arCos\left(\frac{-3}{\sqrt{70}}\right) = 111.01°$$

ـ التمرين 05 : تكتب معادلة مسار النقطة المادية M في جملة الإحداثيات الأسطوانية بالعلاقة :
$\rho = Cte$ و $z = a.\theta$ ، حيث أن a ثابت موجب. أرسم هذا المسار من أجل $0 \leq \theta \leq 4\pi$. ثم مثل أشعة الواحدة عند النقطة $(\theta_0 = 4\pi+\pi/3)$

الحل :



هنا الحركة لولبية تصاعدية منتظمة تتم على مسار منتظم متكئ على أسطوانة شاقولية محورها Oz.
المسافة الشاقولية بين حلقتين متتاليتين تكون دائما ثابتة و تساوي $2a\pi$.
عند الزاوية $\theta_0 = 4\pi+\pi/3$ تكون النقطة M قد قامت بدورتين كاملتين و زاوية $\pi/3$.
نلاحظ كذلك أن السرعة تكون مائلة و تصنع زاوية معينة مع شعاع الواحدة $\vec{U}_\theta$

ـ التمرين 06 : 1- أحسب في الإحداثيات الديكارتية مساحة السطح المحصور في المجال :
$-1 \leq X \leq +3$ و $2 \leq Y \leq 5$

2- أحسب باستعمال الإحداثيات القطبية محيط و مساحة دائرة نصف قطرها R

3- أحسب في الإحداثيات الكروية مساحة شطر من كرة نصف قطرها R والمحدود بالمجال
$0 \leq \varphi \leq \pi/2$ و $0 \leq \theta \leq \pi/2$

4- أحسب في نفس الجملة حجم جزء من الكرة و الحصور في المجال : $0 \leq \theta \leq \pi$ و $\pi \leq \varphi \leq 0$ ثم استنتج مساحة و حجم هذه الكرة.

الحل :

1- لدينا: $S = \int_{-1}^{3}\int_{2}^{5} dx.dy = \int_{-1}^{3} dx.\int_{2}^{5} dy = [x]_{-1}^{3}.[y]_{2}^{5} = 4.3 = 12$

2- لدينا : $d\vec{l} = d\rho\vec{U}_\rho + \rho d\theta\vec{U}_\theta$ ونحصل على $\|d\vec{l}\| = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2}$ وفي حالة الدائرة لدينا: $\rho = R = ct \Leftarrow d\rho = 0$ فيكون $\|d\vec{l}\| = Rd\theta$ و يكون محيط الدائرة:

$$L = \int_0^{2\pi}\|d\vec{l}\| = \int_0^{2\pi} Rd\theta = 2\pi R$$

و تكون المساحة العنصرية: $dS = d\rho.\rho d\theta$ ونحصل على مساحة الدائرة

$$S = \int_0^R\int_0^{2\pi} dS = \int_0^R\int_0^{2\pi} d\rho.\rho d\theta = \int_0^R \rho d\rho.\int_0^{2\pi} d\theta = \tfrac{1}{2}R^2.2\pi = \pi R^2$$

3- في هذه الحالة عنصر الطول يكتب من الشكل: $d\vec{l} = dr.\vec{U}_r + rd\varphi.\vec{U}_\theta + rSin\varphi d\theta.\vec{U}_\varphi$

في حالة المساحة يكون لدينا : $r = R = ct \Leftarrow dr = 0$ و نجد

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2Sin\varphi.d\varphi.d\theta \Leftarrow dS = Rd\varphi.RSin\varphi d\theta = R^2Sin\varphi.d\varphi.d\theta$$

لنجد في الأخير: $S = R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin\varphi d\varphi.\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = R^2[-Cos\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}}.[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{2}R^2$

4- و يكون الحجم : $\Leftarrow dV = dr.rd\varphi.rSin\varphi d\theta = r^2dr.Sin\varphi d\varphi.d\theta$

$$V = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} r^2dr.Sin\varphi d\varphi.d\theta = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R.[-Cos\varphi]_0^{\pi}.[\theta]_0^{\pi} = \tfrac{2}{3}\pi R^3$$

المساحة المحسوبة في السؤال 3 تمثل 1\8 من الكرة لذلك تكون مساحة الكرة:

$$S_{sphere} = 8.S = 8.\tfrac{\pi}{2}R^2 = 4\pi R^2$$

والحجم المحسوب في السؤال 4 يمثل 1\2 الكرة و بالتالي نحصل على حجم الكرة:

$$V_{sphere} = 2.V = 2.\tfrac{2}{3}\pi R^3 = \tfrac{4}{3}\pi R^3$$

- التمرين 07 : ليكن الشعاعان : $\vec{U}_\rho = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$ و $\vec{U}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$ حيث :

$\theta = \omega t$ و ω ثابت موجب

1- أحسب طويلتي الشعاعين ، ماذا تستنتج

2- أحسب الجداءات السلمية $\vec{U}_\rho \cdot \vec{U}_\rho$ ، $\vec{U}_\rho \cdot \vec{U}_\theta$ و $\vec{U}_\theta \cdot \vec{U}_\theta$

3- أحسب $\frac{d\vec{U}_\rho}{d\theta}$ ، $\frac{d\vec{U}_\theta}{d\theta}$ ، ثم $\frac{d\vec{U}_\rho}{dt}$ و $\frac{d\vec{U}_\theta}{dt}$ ماذا تلاحظ ، بين أن : $\frac{d\vec{U}_\rho}{dt} + \omega\vec{U}_\rho = \vec{0}$

4- أحسب الجداءات الشعاعية $\vec{U}_\rho \wedge \vec{U}_\theta$ ، $\vec{U}_\rho \wedge \vec{k}$ ، $\vec{U}_\theta \wedge \vec{k}$ ، و $\frac{d(\vec{U}_\rho \wedge \vec{k})}{dt}$

الحل:

-1 $\|\vec{U}_\rho\| = \sqrt{(Cos\theta)^2 + (Sin\theta)^2} = 1$ ، $\|\vec{U}_\theta\| = \sqrt{(-Sin\theta)^2 + (Cos\theta)^2} = 1$

هذان الشعاعان شعاعا واحدة

-2
$$\vec{U}_\rho \cdot \vec{U}_\rho = Cos\theta.Cos\theta + Sin\theta.Sin\theta = 1$$

$$\vec{U}_\theta \cdot \vec{U}_\theta = (-Sin\theta).(-Sin\theta) + (Cos\theta).(Cos\theta) = 1$$

$$\vec{U}_\rho \cdot \vec{U}_\theta = Cos\theta.(-Sin\theta) + Sin\theta.Cos\theta = 0$$

-3
$$\frac{d\vec{U}_\rho}{d\theta} = \frac{dCos\theta}{d\theta}\vec{i} + \frac{dSin\theta}{d\theta}\vec{j} = -Sin\theta\vec{i} + Cos\theta\vec{j} = \vec{U}_\theta$$

$$\frac{d\vec{U}_\theta}{d\theta} = \frac{d-Sin\theta}{d\theta}\vec{i} + \frac{dCos\theta}{d\theta}\vec{j} = -Cos\theta\vec{i} - Sin\theta\vec{j} = -\vec{U}_\rho$$

$$\frac{d\vec{U}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{U}_\rho}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \omega.\vec{U}_\theta \quad \text{و} \quad \frac{d\vec{U}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{U}_\theta}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = -\omega.\vec{U}_\rho$$

إذا أخذنا العلاقة الأخيرة و نقلنا الطرف الأيمن إلى الجهة الأخرى نحصل على العلاقة :

$$\frac{dU\rho}{dt} + \omega\vec{U}_\rho = \vec{0}$$

-4
$$\vec{U}_\rho \wedge \vec{U}_\theta = (Cos\theta\vec{i} + Sin\theta\vec{j}) \wedge (-Sin\theta\vec{i} + Cos\theta\vec{j})$$
$$= Cos\theta^2\left(\vec{i} \wedge \vec{j}\right) - Sin\theta^2\left(\vec{j} \wedge \vec{i}\right) = \vec{k}$$

$$\vec{U}_\rho \wedge \vec{k} = (Cos\theta\vec{i} + Sin\theta\vec{j}) \wedge \vec{k} = Cos\theta(\vec{i} \wedge \vec{k}) + Sin\theta(\vec{j} \wedge \vec{k})$$
$$= Cos\theta\left(-\vec{j}\right) + Sin\theta\left(\vec{i}\right) = -\vec{U}_\theta$$

$$\vec{U}_\theta \wedge \vec{k} = (-Sin\theta\vec{i} + Cos\theta\vec{j}) \wedge \vec{k} = -Sin\theta(\vec{i} \wedge \vec{k}) + Cos\theta(\vec{j} \wedge \vec{k})$$
$$= -Sin\theta\left(-\vec{j}\right) + Cos\theta\left(\vec{i}\right) = \vec{U}_\rho$$

$$\frac{d(\vec{U}_\rho \wedge \vec{k})}{dt} = \frac{d\vec{U}_\rho}{dt} \wedge \vec{k} + \vec{U}_\rho \wedge \frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{d\vec{U}_\rho}{dt} \wedge \vec{k} = \omega\vec{U}_\theta \wedge \vec{k} = \omega\vec{U}_\rho$$

تمارين إضافية غير محلولة

- التمرين 08 : في حالة التمرين **(02)** ارسم شعاعي الواحدة الموافقين عند المواقع $\theta = \pi/4,\ \pi/2,\ 2\pi/3,\ 2\pi$.

كذلك من أجل المسار المعرف بالمعادلة $\rho = a\sqrt{1 - (c/a)^2 .\mathrm{Sin}^2\theta}$ ، حيث أن a و b ثابتان موجبان و $e = c/a$ يسمى تباعد المركز و $c^2 = a^2 - b^2$ ، شكل في جدول مجموع قيم θ و ρ الموافقة.
أرسم المسار و حدد طبيعته، ماذا يمثل a و b. مثل من أجل: $\theta = 0\ ,\ \pi/3\ ,\ \pi/2\ ,\ 2\pi/3$ أشعة الواحدة.
أعد نفس السؤال من أجل المعالة القطبية : $\rho = \rho_0(1 + \mathrm{Cos}\theta)$ في المجال $0 \le \theta \le 2\pi$

- التمرين 09 : أعد التمرين **(05)** من أجل المعادلة : $\rho = b.\theta$ و $z = a.\theta$ ، a و b ثابتان موجبان في المجال $0 \le \theta \le 4\pi$. ثم مثل أشعة الواحدة عند النقطة ($\theta_0 = \pi/4$)

حل السلسلة رقم 03 : حركة النقطة المادية

- التمرين 02: ينتقل جسيم على مسار معادلته : $\vec{r} = (t^2 + t)\vec{i} + (3t - 2)\vec{j} + (2t^3 - 4t^2)\vec{k}$

اوجد عند اللحظة $t = 2s$:

1- سرعته و طويلتها. 2- تسارعه و طويلته

- التمرين 03: تعطى إحداثيات نقطة مادية بدلالة الزمن على النحو التالي :

$$X(t) = 2t \text{ و } Y(t) = 4t(t-1)$$

1- عين طبيعة المسار و أرسمه في معلم ديكارتي ثم حدد نقطة بداية الحركة و اتجاهها

2- احسب عبارة شعاع السرعة عند اللحظة t، ثم استخرج طويلتها

3- بين بأن الحركة ذات تسارع ثابت ، أحسب مركبتيه المماسية والناظمية ، ثم استنتج نصف قطر الإنحاء عند اللحظة $t = 1s$. ما هي اللحظة الزمنية التي من اجلها يكون شعاعا السرعة و التسارع متعامدين ؟

4- هل توجد لحظة زمنية يكون فيها الشعاعان متوازيين ؟

- التمرين 04: نعرف شعاع الموقع لنقطة مادية بالمعادلة التالية: $\overrightarrow{r(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ ،

حيث: $x(t) = R.Cos(\omega t)$ ، $y(t) = R.Sin(\omega t)$ و $z(t) = V_0 t$

V_0 , R و ω ثوابت موجبة

1- أستخرج معادلة المسار ثم حدد طبيعته ؟

2- احسب شعاعي السرعة و التسارع

3- عين الزاوية بين شعاع السرعة و مولدات أسطوانة للمسار، ثم عين المعادلة الزمنية $S(t)$

4- نفترض أن $V_0 = 0$ كيف يصبح مسار النقطة المادية ؟ ما هي إذا المعادلة الزمنية ؟

- التمرين 06 : تتحرك نقطة مادية في مستوى وفق المعادلات الوسيطية :

$$x(t) = a.Sin(\omega t) \quad ; \quad y(t) = b.Cos(\omega t)$$

a , b و ω ثوابت موجبة، عين :

1- معادلة مسارها

2- عبارتي سرعتها و تسارعها

3- اللحظات التي من أجلها تكون طويلتا السرعة و التسارع أعظمية

- التمرين 08 : تتحرك نقطة مادية في الإحداثيات القطبية وفق المعادلات الوسيطية :

$$\rho = r(1 - Sins\omega t) \quad , \quad \theta = \omega t$$

1- شكل جدول تغير θ , ρ بدلالة الزمن ثم أرسم مسار الحركة

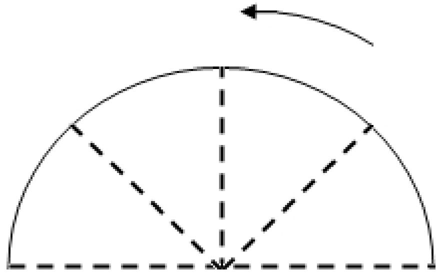
2- أحسب المركبات القطبية لشعاعي السرعة و التسارع ، ثم استنتج المركبات الديكارتية الموافقة.

3- أحسب طويلتي السرعة و التسارع و استنتج المركبتين المماسية و الناظمية لشعاع التسارع.

4- أحسب نصف قطر انحناء المسار بدلالة الزمن

5- أحسب طول المسار بين اللحظة الابتدائية $t_1 = 0$ و اللحظة $t_2 = 2\pi/\omega$

ـ التمرين 09 : **(المنزل)** في حالة لمسار نصف دائري ، مثل شعاع التسارع عند النقاط المحددة :
$\theta = 0 \ , \ \pi/4 \ , \ \pi/2 \ , \ 3\pi/4 \ , \ \pi$ ، و ذلك في الحالتين :
ـ الحركة دائرية منتظمة
ـ الحركة دائرية متغيرة بانتظام. (عند النقطة $\theta = 0$ نعطي $\gamma = 0$)



الحركة النسبية

ـ التمرين 11: إحداثيات جسيم متحرك بالنسبة للمعلم$(R,O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ تعطى بدلالة الزمن حسب العلاقات :

$$x(t) = t^2 - 4t + 1 \ ; \ y(t) = -2t^4 \ ; \ z(t) = 3t^2 .$$

وتكتب في معلم ثاني $(R',O',\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'})$من الشكل :

$$x' = t^2 + t + 2 \ ; \ y' = -2t^4 + 5 \ ; \ z' = 3t^2 - 7 .$$

1ـ أكتب عبارة سرعة الجسيم $\vec{V}$ في المعلم $(R,O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ بدلالة سرعة الجسيم $\vec{V'}$ في المعلم $(R',O',\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'})$
2ـ أكتب نفس الشيء بالنسبة للتسارع .
3ـ حدد قانون الحركة المكتسبة للمعلم $(R',O',\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'})$ بالنسبة للمعلم $(R,O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

ـ التمرين 12 : معلم نسبي Ox'y' يقوم بدوران منتظم حول نقطة O ، و جسيم M يتحرك فوق المحور Ox' بسرعة ثابتة. في اللحظة الابتدائية الجسيم يوجد عند النقطة O و المحور Ox' متطابق مع المحور Ox

1ـ أحسب عبارة السرعة المكتسبة ، ثم أستنتج السرعة المطلقة.
في المرة الثانية النقطة تتحرك وفق المحور Ox' بتسارع ثابت بحيث تتواجد في اللحظة الابتدائية عند النقطة O و المحور Ox' متطابق مع المحور Ox
2ـ أحسب عبارات كل من التسارع النسبي ، التسارع المكتسب ، و التسارع التكميلي (كوريو ليس) ، ثم أستنتج التسارع المطلق.
3ـ أستخرج مباشرة عبارة التسارع المطلق باستعمال مركبات شعاع الموقع في المعلم المطلق.

1

حل السلسلة رقم 2: حركة النقطة المادية

- التمرين 2:

1- حساب شعاع السرعة:

$$\vec{v}\begin{cases}2t+1\\3\\6t^2-8t\end{cases} : t=2 \Rightarrow \vec{v}\begin{Bmatrix}5\\3\\8\end{Bmatrix} \Rightarrow \|\vec{v}\|=\sqrt{25+9+64}\simeq 9{,}899$$

2- حساب شعاع التسارع:

$$\vec{\gamma}\begin{cases}2\\0\\12t-8\end{cases} : t=2 \Rightarrow \vec{\gamma}\begin{Bmatrix}2\\0\\16\end{Bmatrix} \Rightarrow \|\vec{\gamma}\|=\sqrt{4+256}\simeq 16{,}125$$

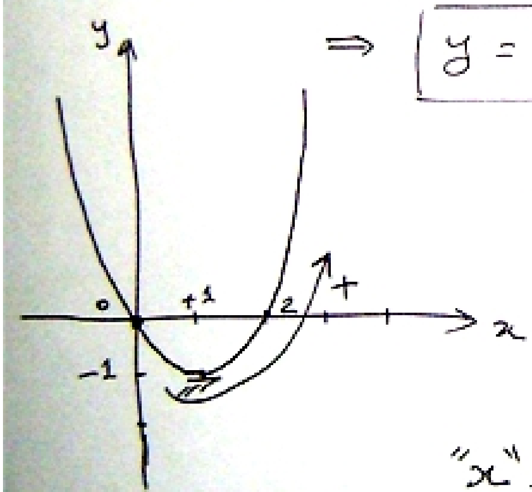
- التمرين 3:

1- طبيعة المسار: نحذف الزمن ⇐

$x=2t \Rightarrow t=\frac{x}{2}$

$y=4.\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}-1\right)$

$\Rightarrow \boxed{y=x^2-2x}$



هو قطع مكافئ، له محور موازي لـ (oy) مقعر نحو الأعلى، يتقاطع مع (ox) في النقطتين $x_1=0$ و $x_2=2$

ذروته عند $x_0=1$ و $y_0=-1$

بداية عند $t=0$ ⇐ أي عند $O(0,0)$

وتكون في إتجاه تزايد الزمن "t" أي تزايد "x"

2- حساب السرعة: $\vec{v}\begin{cases}2\\8t-4\end{cases} \Rightarrow \|\vec{v}\|=\sqrt{4+(8t-4)^2}$

3- حساب التسارع: $\vec{\gamma}\begin{cases}0\\8\end{cases}$ أي أن التسارع ثابت نحو (oy)

لدينا دائماً: التسارع المماسي: $\|\vec{\gamma}_T\|=\left|\frac{d\|\vec{v}\|}{dt}\right|$

(2)

نجد : $\frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = \frac{1}{2}\frac{2(8t-4).8}{\sqrt{4+(8t-4)^2}} = \frac{8(8t-4)}{\sqrt{4+(8t-4)^2}}$

ولدينا إذاً $\vec{u}_T$: شعاع الواحدة المماسي ، $\boxed{\vec{\gamma}_T = \frac{8(8t-4)}{\sqrt{4+(8t-4)^2}}\,\vec{u}_T}$ ، $\vec{u}_T = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

والتسارع الناظمي: $\|\vec{\gamma}_N\| = \sqrt{\|\vec{\gamma}\|^2 - \|\vec{\gamma}_T\|^2}$

$$\|\vec{\gamma}_N\| = \sqrt{(8)^2 - \left[\frac{8(8t-4)}{\sqrt{4+(8t-4)^2}}\right]^2} = \sqrt{\frac{4\times 64}{\left[\sqrt{4+(8t-4)^2}\right]^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\vec{\gamma}_N\| = \frac{16}{\sqrt{4+(8t-4)^2}}} \Rightarrow \vec{\gamma}_N = \|\vec{\gamma}_N\|.\vec{u}_N$$

$\vec{u}_N$: شعاع الواحدة الناظمي

حساب نصف قطر الإنحناء: لدينا دائماً $\|\vec{\gamma}_N\| = \frac{\|\vec{v}\|^2}{\rho}$

* ρ: نصف قطر الإنحناء: $\Leftarrow$ $\rho = \frac{\|\vec{v}\|^2}{\|\vec{\gamma}_N\|} = \frac{\left[4+(8t-4)^2\right]}{\left[\frac{16}{\sqrt{4+(8t-4)^2}}\right]}$

$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{16}\left[4+(8t-4)^2\right]^{3/2} = \frac{1}{2}\left[1+4(2t-1)^2\right]^{3/2}$$

* يكون $\vec{v}$ و $\vec{\gamma}$ متعامدين أي $\vec{v}.\vec{\gamma} = 0 \Leftarrow$ $\vec{\gamma}$ دائماً نحو (oy)

لذلك $\vec{v}$ سوف يكون نحو (ox) ومنه فإن $v_y = 0$

أي $8t-4=0 \Leftarrow$ $\boxed{t_0 = \frac{1}{2}\,s}$

4): يكون $\vec{v}$ و $\vec{\gamma}$ متوازيين أي $\vec{v}\wedge\vec{\gamma} = \vec{0} \Leftarrow$ $\vec{\gamma}$ دائماً نحو (oy)

لذلك $\vec{v}$ سوف يكون نحو (oy) ومنه $v_x = 0$ وهو مستحيل $(v_x = 2)$

③

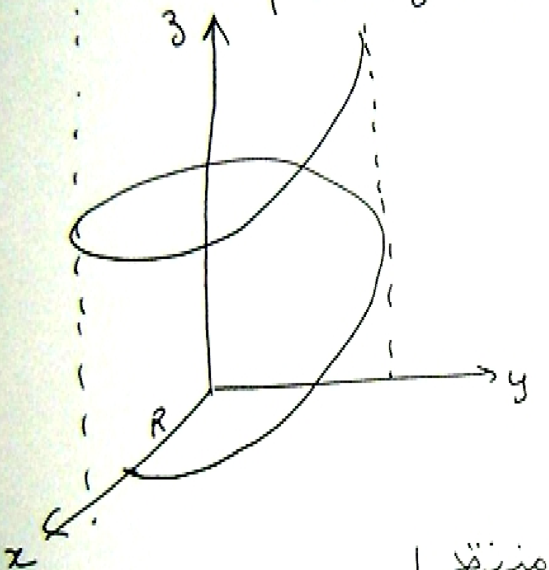
- التمرين 4 :- نضع $\theta = \omega t$: الزاوية القطبية

1- $t = \frac{\theta}{\omega}$ ومنه $x = R\cos\theta$ ، $y = R\sin\theta$ ، $z = \frac{V_0}{\omega}\theta$

وتكون معادلة المسار: $\Longleftarrow$

$$\begin{cases} x = R\cos\left(\frac{\omega}{V_0} z\right) \\ y = R\sin\left(\frac{\omega}{V_0} z\right) \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$

عبارة عن لولب منتظم قاعدته دائرة مركزها "O" ونصف قطرها "R" ومحوره Oz



4

2) *حساب شعاع السرعة :-

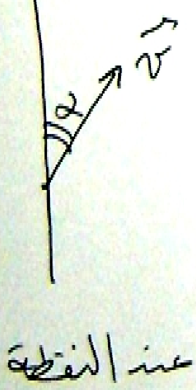
$$\vec{v} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -R\omega \sin\omega t \\ \frac{dy}{dt} = R\omega \cos\omega t \\ \frac{dz}{dt} = V_0 \end{cases}$$

$\frac{dz}{dt} = V_0 = ct$: السرعة التصاعدية ثابتة (منتظم)

* حساب التسارع :-

$$\vec{\gamma} \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -R\omega^2 \cos\omega t \\ \frac{dv_y}{dt} = -R\omega^2 \sin\omega t \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

(المستقيم المولد)



3)- يقع المسار على السطح الجانبي للأسطوانة، يكون عند النقطة M السرعة مماسية للمسار أي للسطح الجانبي لهذه الأسطوانة، والمولدات (les generatrices) هي مستقيمات عمودية تقع في سطح الأسطوانة تكون موازية للمحور (Oz) أي للشعاع $\vec{k}$

(4)

ومنه : نستعمل الجداء السلمي : $\vec{v}\cdot\vec{k}=\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{k}\|\cdot\cos(\vec{v},\vec{k})$

لنجد : $\cos(\vec{v},\vec{k})=\cos\alpha=\dfrac{v_z}{\|\vec{v}\|}$

السرعة ثابتة
الحركة منتظمة : $\|\vec{v}\|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{R^2\omega^2+V_0^2}$

α : زاوية ثابتة : $\Rightarrow \cos\alpha=\dfrac{V_0}{\sqrt{R^2\omega^2+V_0^2}}$

- حساب المعادلة الزمنية :

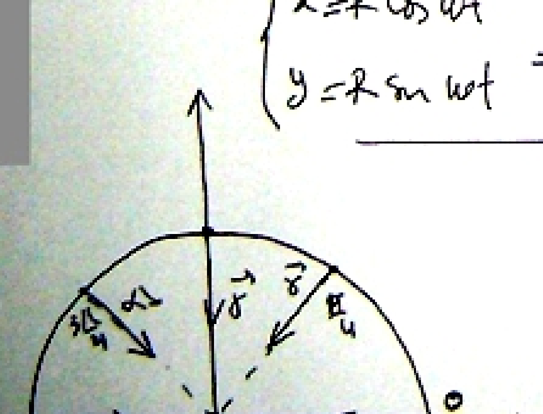
$$\|\vec{v}\|=\left|\frac{dS}{dt}\right| \Rightarrow dS=\|\vec{v}\|\cdot dt \Rightarrow S(t)=\int_0^t\|\vec{v}\|\cdot dt$$

$$\Rightarrow S(t)=\int_0^t\sqrt{R^2\omega^2+V_0^2}\cdot dt$$

$$\boxed{S(t)=\left(\sqrt{R^2\omega^2+V_0^2}\right)\cdot t}$$

4) :- عندما تصبح $V_0=0$ ، لا توجد مركبة حسب (oz) والحركة تصبح دائرية منتظمة :

$$\begin{cases} x=R\cos\omega t \\ y=R\sin\omega t \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=R^2$$



- التمرين 09 :- الحركة دائرية :

* الحركة منتظمة $\Leftarrow$ $\|\vec{v}\|=ct$

وبالتالي : $\|\vec{\gamma}_N\|=\dfrac{\|\vec{v}\|^2}{R}=ct$

$\|\vec{\gamma}_T\|=\dfrac{d\|\vec{v}\|}{dt}=0$

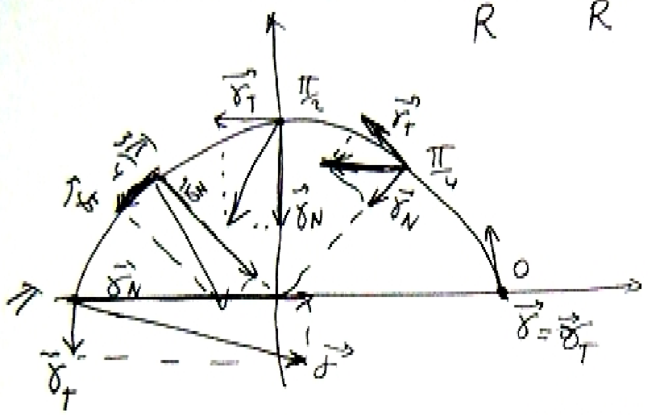
أي أن $\boxed{\vec{\gamma}=\vec{\gamma}_N}=ct$ لها نفس الطويلة وموجهة نحو مركز الدائرة

5

* الحركة متغيرة بانتظام : ⇐ $\|\gamma_T\| = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = ct$.

وهذا يعني أن $\|\vec{v}\| = \|\vec{\gamma_T}\|.t + \|\vec{v_0}\|$ ، $\|\vec{v_0}\| = 0$

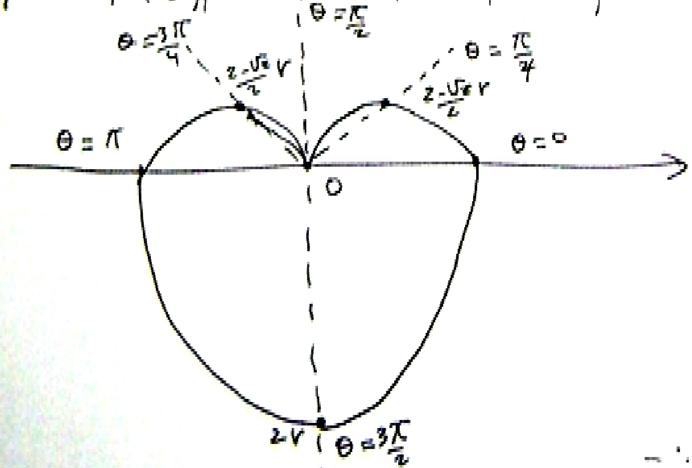
والتسارع الناظمي : $\|\vec{\gamma_N}\| = \frac{\|\vec{v}\|^2}{R} = \frac{\|\vec{\gamma_T}\|^2}{R} t^2$: يتزايد من الشكل $\sim t^2$



التمرين 08 :-

-1

t	0	$\frac{\pi}{4\omega}$	$\frac{\pi}{2\omega}$	$\frac{3\pi}{4\omega}$	$\frac{\pi}{\omega}$	$\frac{3\pi}{2\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}$
θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$3\pi/2$	2π
ρ	r	$r\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$	0	$r\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$	r	$2r$	r



2 - حساب السرعة :-

$\vec{OM} = \rho.\vec{u_\rho} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{\rho}\vec{u_\rho} + \rho\dot{\theta}\vec{u_\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \omega$ ، $\dot{\rho} = -r\omega\cos\omega t$

$\vec{v} = (-r\omega\cos\omega t)\vec{u_\rho} + (r\omega[1-\sin\omega t])\vec{u_\theta}$ مع $\vec{u_\rho}\begin{cases}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{cases}$ ، $\vec{u_\theta}\begin{cases}-\sin\omega t\\ \cos\omega t\end{cases}$

بالتعويض نجد : $\vec{v}\begin{cases}v_x = -2r\omega\cos^2\omega t\\ v_y = r\omega\cos\omega t(1-2\sin\omega t)\end{cases}$

6

- حساب التسارع :-

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$$

$$\vec{\gamma} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u_\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u_\theta}$$

مع $\ddot{\theta} = \dot{\omega} = 0$ و $\ddot{\rho} = r\omega^2 \sin\omega t$ و منه :

$$\vec{\gamma} = \left[r\omega^2 \sin\omega t - r\omega^2(1 - \sin\omega t)\right]\vec{u_\rho} + \left[-2r\omega^2\cos\omega t\right]\vec{u_\theta}$$

$$\vec{\gamma}\begin{cases}\gamma_x = r\omega^2(4\sin\omega t\cos\omega t - 1)\\ \gamma_y = r\omega^2(4\sin^2\omega t - 3)\end{cases}$$

-3 طويلة السرعة

$$\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{(-r\omega\cos\omega t)^2 + (r\omega[1 - \sin\omega t])^2} = r\omega\sqrt{2(1 - \sin\omega t)}}$$

طويلة التسارع :-

$$\boxed{\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{(2\sin\omega t - 1)^2 + (-2\cos\omega t)^2}\cdot r\omega^2 = r\omega^2\sqrt{5 - 4\sin\omega t}}$$

- التسارع المماسي :-

$$\boxed{\|\vec{\gamma_T}\| = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = -\frac{r\omega^2\cos\omega t}{\sqrt{2(1 - \sin\omega t)}}}$$

- التسارع الناظمي :

$$\|\vec{\gamma_N}\| = \sqrt{\|\vec{\gamma}\|^2 - \|\vec{\gamma_T}\|^2} = r\omega^2\left[(5 - 4\sin\omega t) - \frac{\cos^2\omega t}{2(1 - \sin\omega t)}\right]^{1/2}$$

$$= r\omega^2\left[\frac{9 - 18\sin\omega t + 9\sin^2\omega t}{2(1 - \sin\omega t)}\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{9}{2}}\cdot r\omega^2\left[\frac{(1 - \sin\omega t)^2}{(1 - \sin\omega t)}\right]^{1/2}$$

$$\boxed{\|\vec{\gamma_N}\| = \sqrt{\frac{9}{2}}\, r\omega^2(1 - \sin\omega t)^{1/2}}$$

-4 حساب نصف قطر الانحناء :- لدينا $\|\vec{\gamma_N}\| = \frac{\|\vec{v}\|^2}{\rho} \Leftarrow \rho = \frac{\|\vec{v}\|^2}{\|\vec{\gamma_N}\|}$

$$\boxed{\rho = \frac{2\sqrt{2}}{3}r\cdot\sqrt{(1 - \sin\omega t)}} \Leftarrow \rho = \frac{2r^2\omega^2(1 - \sin\omega t)}{\sqrt{\frac{9}{2}}r\omega^2(1 - \sin\omega t)^{1/2}}$$

7

5- حساب طول المسار:

$ds = \|\vec{v}\| . dt$

$$\Rightarrow S = \int_{t_1}^{t} \|\vec{v}\| . dt = \int_0^{2\pi/\omega} r\omega\sqrt{2(1-\sin\omega t)} . dt \quad , \quad 1 = \sin^2\frac{\omega t}{2} + \cos^2\frac{\omega t}{2}$$

$$\sin\omega t = 2\sin\frac{\omega t}{2} . \cos\frac{\omega t}{2}$$

$$\Rightarrow S = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} r\omega\sqrt{2\left(\sin\frac{\omega t}{2} - \cos\frac{\omega t}{2}\right)^2} . dt = r\omega\sqrt{2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\left(\sin\frac{\omega t}{2} - \cos\frac{\omega t}{2}\right)dt$$

$$S = r\omega\sqrt{2}\left[\frac{2}{\omega}\left(-\cos\frac{\omega t}{2} - \sin\frac{\omega t}{2}\right)\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = 2\sqrt{2}\, r . \left[(\cos\pi - \sin\pi) - (\cos 0 - \sin 0)\right]$$

$$S = r\omega\sqrt{2}\left[-1 - (1)\right] = = -2\sqrt{2}\, r\omega$$

ننزع (-) لأن $S > 0$ دائماً والإشارة (-) جاءت من الجذر

التمرين 11:

الحركة النسبية: $\vec{i} = \vec{i}$ ، $\vec{j} = \vec{j}$ ، $\vec{k} = \vec{k}$

1- في المعلم $(O\vec{i}\vec{j}\vec{k})$. لدينا

$$\vec{v}\begin{cases} 2t - 4 \\ -8t^3 \\ 6t \end{cases}$$

وفي المعلم $(O'\vec{i}'\vec{j}'\vec{k}')$ نجد:

$$\vec{v}'\begin{cases} 2t + 1 \\ -8t^3 \\ 6t \end{cases}$$

2- في المعلم $(O\vec{i}\vec{j}\vec{k})$:

$$\vec{\gamma}\begin{cases} 2 \\ -24t^2 \\ 6 \end{cases}$$

وفي المعلم $(O'\vec{i}'\vec{j}'\vec{k}')$:

$$\vec{\gamma}'\begin{cases} 2 \\ -24t^2 \\ 6 \end{cases}$$

$$\Leftarrow \quad \vec{\gamma} = \vec{\gamma}'$$

و $\vec{v} = \vec{v}' - 5\vec{i}$

في الحالة العامة نكتب ، $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v_e}$ حيث $\vec{v_e}$ السرعة المكتسبة

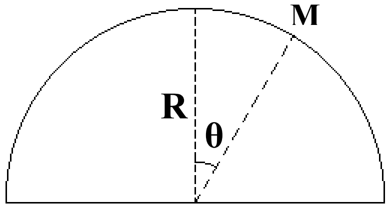
بالمقابلة نجد أن $\vec{v_e} = -5\vec{i}$

أي أن المعلم $(O'\vec{i}'\vec{j}'\vec{k}')$ يتحرك بسرعة $\vec{v_e}$ بالنسبة للمعلم $(O\vec{i}\vec{j}\vec{k})$

السلسلة رقم 03 : تحريك النقطة المادية

- التمرين 01 : جسم كتلته **m** يتحرك على مستوي أفقي بحيث ينطلق بسرعة ابتدائية $\overrightarrow{V_0}$. بعد قطع مسافة **d** يتوقف الجسم عن الحركة، أستنتج قيمة معامل الاحتكاك **f**، و زمن توقف الجسم .

- التمرين 02 : جسم كتلته **m** موجود عند قمة نصف كرة من الجليد نصف قطرها **R** ، ينزلق دون احتكاك و دون سرعة ابتدائية



1- حدد مجموع القوى التي تؤثر في الجسم، ثم أحسب قوة رد الفعل عند النقطة **M** بدلالة الزاوية **θ** ، **g** و **m**.

2- أوجد الزاوية التي يغادر بها الجسم الكرة و السرعة التي اكتسبها.

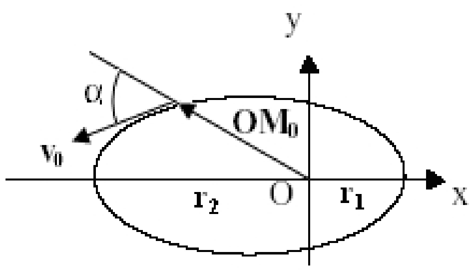
- التمرين 03 : كتلة **m** تحت تأثير قوتين : $\overrightarrow{F_1} = \mathrm{a.\ Sin}(\omega t).\vec{i}$ و $\overrightarrow{F_2} = \mathrm{b.\ Cos}(\omega t).\vec{j}$
حيث **a** و **b** ثابتان موجبان، في اللحظة الابتدائية **t = 0** تـوجد الكتلة عند النقطة **M_0 (0 , y_0)** و يملك سرعة $\overrightarrow{V_0} = V_0.\vec{i}$ مع ($V_0=-a/m\omega$, $y_0=-b/m\omega^2$)

1- أوجد عبارة التسارع

2- أوجد عبارة السرعة

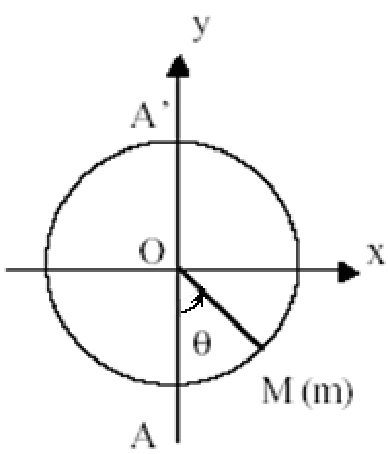
3- أوجد معادلة المسار

- التمرين 04: بين أن في حالة نقطة مادية خاضعة لتأثير قوة مركزية وكان مسارها دائريا، فإن حركتها تكون دائرية منتظمة.



- التمرين 05: نقطة مادية تحت تأثير قوة مركزية مركزها **O** ، تسلك مسارا إهليجيا. عند النقطة **M_0**، شعاع موقعها هو**OM_0** و سرعتها **v_0** مع الزاوية($\alpha =$ **(OM_0 , v_0**) . القيم الحدية لـ **OM_0** هي**r_1** و **r_2** مع **$r_2 > r_1$**. أحسب قيمة السرعة في هاتين النقطتين بدلالة معطيات التمرين

- التمرين 06: نقطة مادية **M** كتلتها **m** مربوطة بالمركز **O** بواسطة خيط غير قابل للتمدد و مهمل الكتلة، تتحرك على مسار دائري شاقولي نصف قطره **r** .

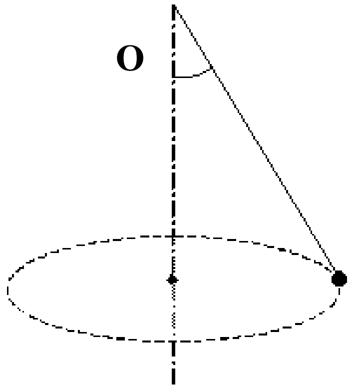


1- أحسب شدة توتر الخيط عند النقطتين **A** و **A'** بدلالة **v_A, r, m** , **$v_{A'}$ و g** ، هل القيم موجبة

2- أكتب المعادلة الأساسية للتحريك ، ثم استنتج المعادلة التفاضلية للزاوية θ التي يصنعها **OM** مع الشاقول(لأجل مكاملة المعادلة نضرب طرفيها بالمقدار $d\,\theta/dt$) ثم استنتج السرعة عند اللحظة **t**، مع العلم أن السرعة الابتدائية (**θ = 0**) هي **v_0** (نكتب **v^2** بدلالة **v_0 , g , r, θ**).أحسب عند ذلك شدة توتر الخيط

3- لنعتبر θ_v قيمة الزاوية التي تكون من أجلها السرعة معدومة، و θ_T القيمة التي يكون من أجلها التوتر معدوما، أستخرج عبارة كل من **cos θ_v** و **cos θ_T** بدلالة نفس المعطيات ثم أرسمها بدلالة**v_0** و استنتج طبيعة الحركة حسب قيمة **v_0**

- التمرين 07: نعتبر نقطة مادية معلقة في طرف خيط طوله **L** و طرفه الآخر ثابت عند النقطة **O** .
نفترض أن النقطة المادية تقوم بحركة دائرية منتظمة بسرعة زاوية ω_1 .

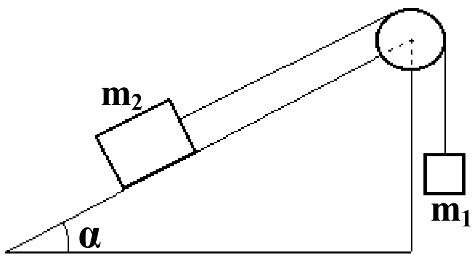


1- أوجد العلاقة بين ω_1 و **L** ، **g** ، **Cosα** . أحسب توتر الخيط
2- بين أن الحركة تكون ممكنة إذا كانت $\omega_1 \geq \omega_0$، عين هذه القيمة
3- أحسب كمية الحركة $\vec{P} = m.\vec{V}$ و العزم الحركي $\vec{L}$، ثم عزم محصلة القوى بالنسبة للنقطة **O**. تحقق من نظرية العزم الحركي
4- نفترض أن النقطة المادية تتحرك هذه المرة على السطح الجانبي لمخروط نصف زاوية رأسه **α**، بسرعة زاوية ثابتة ω_2 حيث $\omega_2 < \omega_1$ و أن الحركة تتم دون احتكاك، ما هي قيمة رد فعل المخروط على النقطة المادية، ماذا يحدث في حالة $\omega_2 > \omega_1$.

- التمرين 08: (المنزل) جسم كتلته **m** ، يسقط شاقوليا بدون سرعة ابتدائية ، تحت تأثير الثقل ، يخضع إلى قوة مقاومة الهواء و التي تتبع القانون : $\vec{R} = K.m.\vec{V}$ ، حيث **K** ثابت موجب.
1- أكتب القانون الأساسي للتحريك في هذه الحالة
2- أستخرج المعادلة التفاضلية التي تحدد قانون تغير السرعة مع الزمن
3- ماذا يحدث لو قذفت الكتلة بسرعة $\vec{V_0}$ نحو الأسفل.
4- عين في الحالتين قيمة السرعة الحدية.

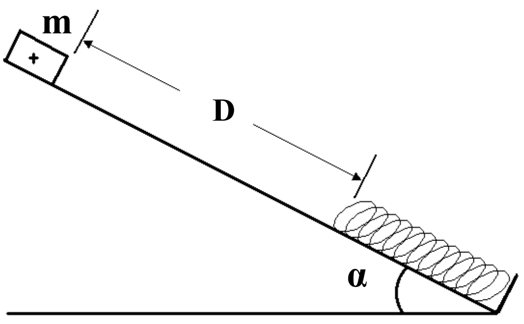
- التمرين 09: (المنزل) جسيم كتلته **m** و شحنته **q** موضوع داخل وسط حيث ينتشر حقل كهربائي من الشكل : $\vec{E} = E_0.\vec{j}$ حيث E_0 ثابت موجب، في البداية يوجد الجسيم عند مركز الإحداثيات و يملك سرعة $\vec{V_0}$ تصنع زاوية **α** مع المحور **Ox**. نفترض بأن الوسط الذي ينتقل فيه الجسيم يؤثر فيه بقوة احتكاك لزج من الشكل: $\vec{F_f} = -K.\vec{V}$ حيث $\vec{V}$ هي سرعة الجسيم. يمكننا إهمال الثقل أمام القوى الأخرى
1- أكتب العلاقة الأساسية للتحريك
2- أستخرج المعادلة التفاضلية للسرعة الجسيم ثم بين أن السرعة تكتب من الشكل :
$V_x = a.e^{-\beta t}$ و $V_y = c.e^{-\beta t} + d$ أحسب $a\ ,\ \beta\ ,\ c\ ,\ d$
3- أستنتج $x(t)\ \ ,\ \ y(t)$ ، إلى أي قيم حدية تنتهي هاتين الدالتين لما $t\to\infty$. ما هو شكل المسار.

- التمرين 10: (المنزل) جملة مشكلة من كتلتين m_1 و m_2 مرتبطتان بواسطة خيط غير قابل للتمدد يعبر عبر بكرة عديمة الكتلة حسب الشكل.



1- حدد مجموع القوى التي تؤثر في m_1 وفي m_2
2- أستخرج عبارة تسارع الكتلتين بدلالة m_1 ، m_2 ، **α** و **g** .
3- أدرس بدلالة m_1 و m_2 طبيعة و اتجاه الحركة، حدد التوازن
4- نريد أن يكون التسارع $\gamma = 1/10.\ g$ ، ما هي نسبة الكتلتين بدلالة الزاوية **α**.

- التمرين 11: (المنزل) جسم كتلته **m = 10Kg** ينزلق على مستوي مائل زاويته **α** و معامل احتكاكه **f = 0.1**



1- ما هي أصغر زاوية α_{min} يبدأ الجسم الحركة معها
2- نأخذ زاوية $\alpha = 30° > \alpha_{min}$:
أ- أكتب القانون الأساسي للتحريك، و استخرج عبارة التسارع
ب- إذا كانت سرعة الجسم الابتدائية معدومة، ما قيمة سرعته

بعد أن يقطع مسافة $D = 10m$.

ت- عند هذه المسافة يصطدم الجسم بنابض ثابت مرونته

$K = 200N/m$ ، فيتقلص لمسافة ΔX، أوجد قيمة الانكماش العظمى

ث- يرتد الجسم نحو الأعلى لمسافة D'، أحسب هذه المسافة (نأخذ $g = 10m/S^2$.)

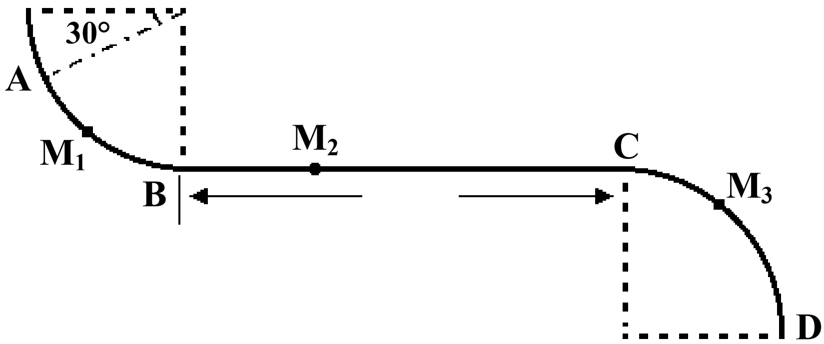
- التمرين 12: **(المنزل)** جسم كتلته **m** ينزلق على سطح موجه مشكل من ثلاثة أجزاء : **AB** جزء من دائرة نصف قطرها **R** ، و **BC** جزء مستقيم أفقي طوله **2R** ، و **CD** ربع آخر من دائرة لها نفس نصف القطر. ينزلق الجسم بدون احتكاك على الجزئين **AB** و **CD** و على الجزء **BC** باحتكاك معامله **f**.

نترك الجسم عند النقطة **A (θ = 30° , t = 0)** بدون سرعة ابتدائية أوجد:

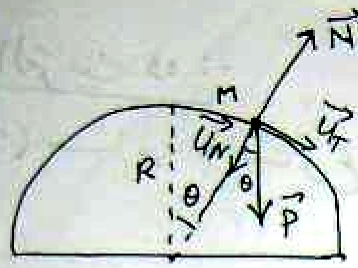
1- السرعة و رد الفعل عند نقطة كيفية M_1 من الجزء **AB** ، ثم استنتج السرعة عند النقطة **B**.

2- السرعة و رد الفعل عند نقطة كيفية M_2 من الجزء **BC** ، أحسب السرعة عند النقطة **C**

3- السرعة و رد الفعل عند نقطة كيفية M_3 من الجزء **CD** ، أوجد الزاوية التي يغادر بها الجسم هذا السطح.



1



- حل التمرين 02 : 1) القوى المؤثرة هي الثقل $\vec{P}$ و رد الفعل الناظمي $\vec{N}$ (بدون إحتكاك)

قانون نيوتن يكتب

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{\gamma}$$

نستعمل الإحداثيات الذاتية $(\vec{u}_N, \vec{u}_T)$.

$$(1) \quad P\cos\theta - N = m\gamma_N = m\frac{V^2}{R}$$

$$(2) \quad P\sin\theta = m\gamma_T = m\frac{dV}{dt}.$$

لدينا حركة دائرية لذلك : $V = R\omega = R\frac{d\theta}{dt}$ ، نضرب (2) في $\frac{d\theta}{dt}$ ثم نعوض بـ V فنجد :

$$mg\sin\theta.\frac{d\theta}{dt} = m\frac{dV}{dt}.\frac{V}{R}$$ نكامل في الأخير

$$\int_0^\theta mg.\sin\theta\, d\theta = \int_0^V \frac{m}{R} V\, dV$$

$$\Leftarrow \quad mg\left[1-\cos\theta\right] = \frac{1}{2}\frac{m}{R}V^2$$ نعوض في (1)

$$\Leftarrow \quad \boxed{N = mg\cos\theta - \frac{m}{R}V^2 = mg\left[3\cos\theta - 2\right]}$$

2) - يغادر الجسم سطح الكرة عندما تصبح $N=0$ فنجد :

$$3\cos\theta_0 = 2 \Rightarrow \boxed{\cos\theta_0 = \frac{2}{3}}$$

2

التمرين 03 :

1) حساب التسارع :

$$\boxed{\begin{cases} \gamma_x = \frac{a}{m}\sin\omega t \\ \gamma_y = \frac{b}{m}\cos\omega t \end{cases}}$$

2) حساب السرعة : بالتكامل :

$$\begin{cases} V_x = \frac{-a}{m\omega}\cos\omega t + V_{x_0} \\ V_y = \frac{b}{m\omega}\sin\omega t + V_{y_0} \end{cases} \quad \text{à } t=0 \quad \begin{cases} V_x(0) = -\frac{a}{m\omega} \Rightarrow V_{x_0}=0 \\ V_y(0) = 0 \Rightarrow V_{y_0}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} V_x = -\frac{a}{m\omega}\cos\omega t \\ V_y = \frac{b}{m\omega}\sin\omega t \end{cases}}$$

3) حساب الفاصلة : بالتكامل :

$$\begin{cases} x = -\frac{a}{m\omega^2}\sin\omega t + x_0 \\ y = -\frac{b}{m\omega^2}\cos\omega t + y_0 \end{cases} \quad \text{à } t=0 \quad \begin{cases} x(0) = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \\ y(0) = \frac{-b}{m\omega^2} \Rightarrow y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -\frac{a}{m\omega^2}\sin\omega t \\ y = -\frac{b}{m\omega^2}\cos\omega t \end{cases}}$$

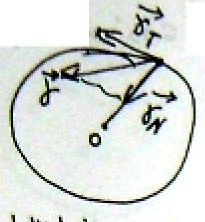
وتكون معادلة المسار هي :

$$\boxed{\frac{x^2}{\left(\frac{-a}{m\omega^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{-b}{m\omega^2}\right)^2} = 1}$$

قطع ناقص

3

- التمرين 04 :- الحركة ذات تسارع مركزي وفي هذه الحالة



المركز هو مركز الدائرة :

$\vec{\gamma}_N$ متجه دائما نحو المركز "O"

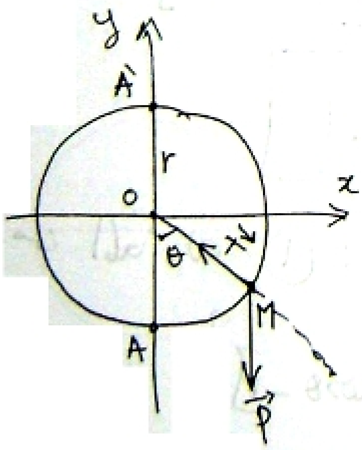
$\vec{\gamma}_T$ مماسي للمسار لذلك $\vec{\gamma}$ غير موجه نحو "O" وبالتالي في حالة

$\vec{\gamma}_T \neq \vec{0}$ نلاحظ أن $\vec{\gamma}$ غير موجه نحو "O" والنتيجة هي

الحركة ذات تسارع مركزي $\Leftrightarrow$ $\vec{\gamma}_T = \vec{0}$

أي الحركة دائرية منتظمة

- التمرين 05 :- نستعمل نفس الطريقة في التمرين (02) :



1- لدينا دائما : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{\gamma}$

نأخذ الإحداثيات الذاتية $(\vec{U}_N, \vec{U}_T)$

بالإسقاط :

$$\begin{cases} T - mg\cos\theta = m\gamma_N = m\frac{V^2}{r} & (1) \\ -mg\sin\theta = m\gamma_T = m\frac{dV}{dt} & (2) \end{cases}$$

في النقطة (A) : $\theta = 0$ المعادلة (1) تصبح $T_A - mg = \frac{m}{r}V_A^2$

$$\boxed{T_A = mg + \frac{m}{r}V_A^2}$$

في النقطة (A') : $\theta = \pi$ المعادلة (1) تصبح $T_{A'} + mg = \frac{m}{r}V_{A'}^2$

$$\boxed{T_{A'} = -mg + \frac{m}{r}V_{A'}^2}$$

(4)

2- نأخذ المعادلة (2) : $-mg\sin\theta = m\gamma_T = m\dfrac{dV}{dt}$

نضرب المعادلة د $\dfrac{d\theta}{dt}$ مع : $V = r\dfrac{d\theta}{dt}$

⇐ $-mg\sin\theta \cdot \dfrac{d\theta}{dt} = m \cdot \dfrac{dV}{dt} \cdot \dfrac{V}{r}$

ونحصل على المعادلة التفاضلية :

$$\boxed{-g\sin\theta \, d\theta = \frac{1}{r} V \, dV}$$

بالتكامل :

$$\left[g\cos\theta\right]_0^\theta = \left[\frac{1}{2}\frac{V^2}{r}\right]_{V_0}^{V}$$

$$\Rightarrow \quad g\left[\cos\theta - 1\right] = \frac{1}{2r}\left[V^2 - V_0^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V^2 = V_0^2 + 2gr\left[\cos\theta - 1\right]}$$

ومن المعادلة (1) : $T = mg\cos\theta + m\dfrac{V^2}{r}$

$$T = mg\cos\theta + \frac{m}{r}\left\{V_0^2 + 2gr\left[\cos\theta - 1\right]\right\}$$

$$\boxed{T = m\frac{V_0^2}{r} + gm\left[3\cos\theta - 2\right]}$$

3- ⇐ $V=0$: $\cos\theta_V = 1 - \dfrac{V_0^2}{2gr}$

⇐ $T=0$: $\cos\theta_T = \dfrac{2}{3} - \dfrac{V_0^2}{3gr}$

5

التمرين 5 :- الحركة ذات تسارع مركزي لذلك لدينا قانون المساحات :

$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}C$ ، C ثابت المساحات

(سرعة المسح) :

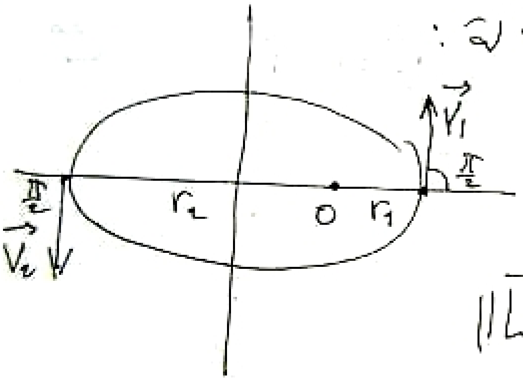
$V_s=\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}\frac{\|\vec{L}\|}{m} \Leftarrow C=\frac{\|\vec{L}\|}{m}$

$\vec{L}$ هو العزم الحركي :

$\vec{L}=m(\vec{OM}\wedge\vec{V}) \Leftarrow \vec{L}=\vec{OM}\wedge\vec{P}$ مع

عند النقطة M_0 : $\|\vec{L_0}\|=m\,\|\vec{OM_0}\|.\|\vec{V_0}\|.\sin\alpha=ct$

العزم الحركي ثابت في هذه الحالة :



عند $M_1\,(r_1)$ و $M_2\,(r_2)$

الزاوية $\alpha=\frac{\pi}{2}$ ومنه

$\|\vec{L_1}\|=m\,r_1.V_1$

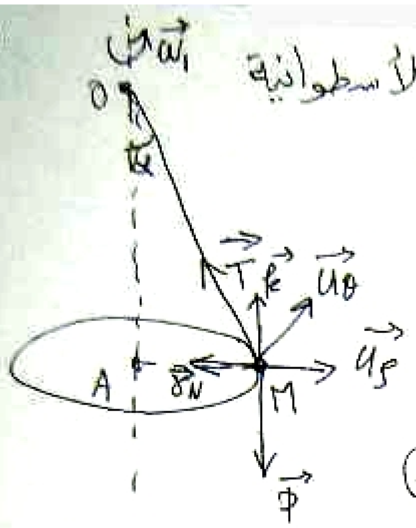
$\|\vec{L_2}\|=m\,r_2.V_2$

$\|\vec{L_0}\|=\|\vec{L_1}\|=\|\vec{L_2}\|$

فنجد :

$$\boxed{\begin{aligned}V_1&=\frac{\|\vec{L_0}\|}{m r_1}=\frac{\|\vec{OM_0}\|.\|\vec{V_0}\|}{r_1}\sin\alpha\\ V_2&=\frac{\|\vec{L_0}\|}{m r_2}=\frac{\|\vec{OM_0}\|.\|\vec{V_0}\|}{r_2}\sin\alpha\end{aligned}}$$

(6)



1- التمرين 07 : نستعمل الإحداثيات الأسطوانية

1) - الحركة دائرية منتظمة مركزها "A"

قانون التحريك نكتب : $\vec{P}+\vec{T}=m\vec{\gamma}_M$

بالإسقاط على $\vec{U}_\rho$ و $\vec{k}$ نجد :

$① * -T\sin\alpha = -m\gamma_M$ و $② * T\cos\alpha - P = 0$

مع $\gamma_N=\frac{V^2}{r}=r\omega_1^2$ و $r=L\sin\alpha \Leftarrow \|\vec{\gamma}_N\|=L\sin\alpha\,\omega_1^2$

بالتعويض نجد : $\boxed{\cos\alpha=\frac{g}{L\omega_1^2}}$ و $\boxed{T=mL\omega_1^2}$

2)- $\cos\alpha\le 1$ ومنه $\frac{g}{L\omega_1^2}\le 1$ أو $\boxed{\omega_1\ge\omega_0=\sqrt{\frac{g}{L}}}$

3)- لدينا : $\vec{OM}=L\sin\alpha\,\vec{U}_\rho - L\cos\alpha\,\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{V}=\frac{d\vec{OM}}{dt}=L\sin\alpha\,\omega_1\vec{U}_\theta}$

والعزم الحركي : $\vec{L}=\vec{OM}\wedge\vec{P} = m(L\sin\alpha\,\vec{U}_\rho - L\cos\alpha\,\vec{k})\wedge\vec{V}$

$\boxed{\vec{L} = L^2\omega_1 m(\sin^2\alpha\,\vec{k} - \sin\alpha\cos\alpha\,\vec{U}_\rho)}$ و $\frac{d\vec{L}}{dt}=L^2\omega_1(-\sin\alpha\cos\alpha.\omega_1\vec{U}_\theta).m$

$\Leftarrow \boxed{\frac{d\vec{L}}{dt}=-mL^2\omega_1^2\sin\alpha\cos\alpha\,\vec{U}_\theta}$

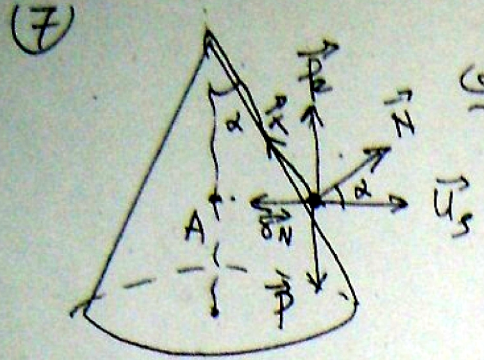
وعزم القوى هو فقط ناتج عن الثقل لأن $\vec{OM}\,//\,\vec{T}$

$\vec{\mathcal{M}}_P=\vec{OM}\wedge\vec{P}=(L\sin\alpha\,\vec{U}_\rho - L\cos\alpha\,\vec{k})\wedge(-mg\,\vec{k})$

$\vec{\mathcal{M}}_P=+L\sin\alpha\, mg\,\vec{U}_\theta$ مع $\cos\alpha=\frac{g}{L\omega_1^2}$

$\Leftarrow \frac{d\vec{L}}{dt}=-mL^2\omega_1^2\sin\alpha.\frac{g}{L\omega_1^2}\vec{U}_\theta=-L\sin\alpha\, mg\,\vec{U}_\theta$ وهي نفس القيمة

(7)



4)- رد الفعل عمودي على السطح الجانبي لأن الاحتكاك معدوم

بالإسقاط على $\vec{U}_\rho$ و $\vec{k}$ نجد :

$$\vec{T} + \vec{N} + \vec{P} = m\vec{\gamma}_N$$

$-\vec{U}_\rho$: ① $-T\sin\alpha + N\cos\alpha = m\gamma_N$

$-\vec{k}$: ② $T\cos\alpha + N\sin\alpha - P = 0$

مع $\gamma_N = L\sin\alpha\,\omega_2^2$

$\alpha = ct$

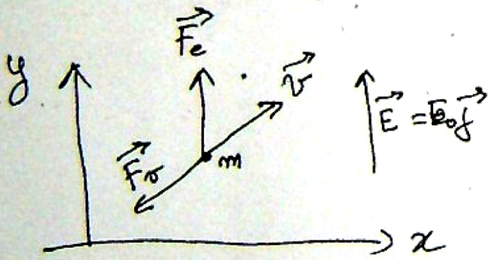
بالإستخراج T من ① وتعويضها في ② نجد N :

$$\boxed{N = \frac{1}{2}m\,\frac{g - L\omega_2^2\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

نلاحظ أن N=0 عندما يكون $\omega_2 \geq \sqrt{\frac{g}{L\cos\alpha}}$ أي $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L\cos\alpha}}$

يصبح الجسم لا يلامس المخروط ونحصل على الحركة السابقة

- التمرين 09 :-



1) - القوى المؤثرة هي القوة الكهربائية : $\vec{F}_e = q\vec{E}$

وقوة المقاومة اللزجة : $\vec{F}_v = -K\vec{v}$ وقانون نيوتن يكتب :

$$\vec{F}_e + \vec{F}_v = m\vec{\gamma}$$

$\Leftarrow$ $\boxed{q\vec{E} - K\vec{v} = m\vec{\gamma}}$ بالإسقاط على المحورين :

OX : $-Kv_x = m\gamma_x \Leftarrow$ ① $\dfrac{dv_x}{dt} + \dfrac{K}{m}v_x = 0$

OY : $qE_0 - Kv_y = m\gamma_y \Leftarrow$ ② $\dfrac{dv_y}{dt} + \dfrac{K}{m}v_y = \dfrac{q}{m}E_0$

(8)

معادلتان تفاضليتان من الدرجة الأولى

حسب Ox : $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{K}{m} v_x \Leftarrow \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{K}{m} dt$

بالتكامل نحصل: $\ln v_x = -\frac{K}{m} t + C \Leftarrow \boxed{v_x = v_{x0} e^{-\frac{K}{m} t}}$

حسب Oy : - نبحث على الحل الخاص للمعادلة :

نضع $v_{y_1} = ct \Leftarrow \frac{K}{m} v_{y_1} = \frac{q}{m} E_0 \Leftarrow \boxed{v_{y_1} = \frac{q}{K} E_0}$

- نبحث على الحل العام بدون طرف ثاني :

$\frac{dv_{y_2}}{dt} = -\frac{K}{m} v_{y_2} \Leftarrow \frac{dv_{y_2}}{v_{y_2}} = -\frac{K}{m} dt$ بالتكامل نحصل:

$\ln v_{y_2} = -\frac{K}{m} t + C' \Leftarrow v_{y_2} = b \cdot e^{-\frac{K}{m} t}$

والحل العام للمعادلة هو: $\boxed{v_y = v_{y_1} + v_{y_2} = \frac{q}{K} E_0 + b e^{-\frac{K}{m} t}}$

- تحديد الثابتين v_{x0} و b من الشروط الإبتدائية

$t = 0$: $\vec{v}(0) = V_0(\cos\alpha \, \vec{i} + \sin\alpha \, \vec{j}) \Leftarrow \begin{cases} v_x(0) = v_{x0} = V_0 \cos\alpha \\ v_y(0) = \frac{q}{K} E_0 + b = V_0 \sin\alpha \end{cases}$

$\Leftarrow b = V_0 \sin\alpha - \frac{q}{K} E_0$

لنجد في الأخير

$\vec{V} = \begin{cases} V_x = V_0 \cos\alpha \, e^{-\frac{K}{m} t} \\ V_y = \frac{q}{K} E_0 + \left(V_0 \sin\alpha - \frac{q}{K} E_0\right) e^{-\frac{K}{m} t} \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} \beta = \frac{K}{m} , \quad a = V_0 \cos\alpha \\ c = \frac{q}{K} E_0 , \quad b = V_0 \sin\alpha - \frac{q}{K} E_0 \end{cases}$

9

3- $x = \int v_x\, dt \Rightarrow \boxed{x = -\frac{m}{K} V_0 \cos\alpha \, e^{-\frac{K}{m}t} + C_x}$

$y = \int v_y\, dt \Rightarrow \boxed{y = -\frac{m}{K}\left(V_0 \sin\alpha - \frac{q}{K}E_0\right) e^{-\frac{K}{m}t} + \frac{q}{K}E_0 t + C_y}$

تحديد C_x و C_y :

$t=0 \qquad x(0)=0 \Rightarrow \boxed{C_x = \frac{m}{K} V_0 \cos\alpha}$

$y(0)=0 \Rightarrow \boxed{C_y = \frac{m}{K}\left(V_0 \sin\alpha - \frac{q}{K}E_0\right)}$

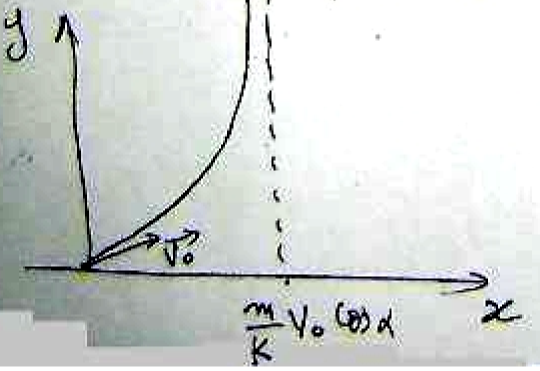
ونجد في الأخير:

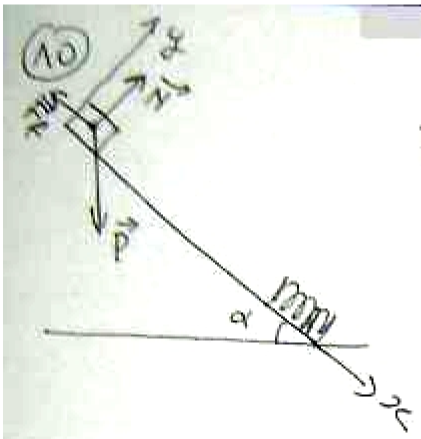
$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \frac{m}{K} V_0 \cos\alpha \left[1 - e^{-\frac{K}{m}t}\right] \\ y(t) &= \frac{m}{K}\left(V_0 \sin\alpha - \frac{q}{K}E_0\right)\left[1 - e^{-\frac{K}{m}t}\right] + \frac{q}{K}E_0 t \end{aligned}}$$

عندما $t \to \infty \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_{lim} = \frac{m}{K} V_0 \cos\alpha \\ y_{lim} = \frac{q}{K}E_0 t + \frac{m}{K}\left(V_0 \sin\alpha - \frac{q}{K}E_0\right) \end{cases}$$

تصبح الحركة مستقيمة منتظمة حسب oy فقط.





التمرين ١١ :- 1) القوى المؤثرة هي

الثقل $\vec{P}$ ، رد الفعل الناظمي $\vec{N}$ والاحتكاك $\vec{F_f}$

عند السكون : $\vec{P}+\vec{N}+\vec{F_f}=\vec{0}$

Ox : $mg\sin\alpha-F_f=0 \Rightarrow F_f=mg\sin\alpha$

Oy : $-mg\cos\alpha+N=0 \Rightarrow N=mg\cos\alpha$

بالقسمة : $f=\frac{F_f}{N}=\tan\alpha \Rightarrow \alpha\le\alpha_m \Rightarrow f=\tan\alpha_{min} \Rightarrow \alpha_{mi}=5,71°$

2)- $\alpha=30°$: أ:- $\vec{P}+\vec{N}+\vec{F_f}=m\vec{\gamma}$ بالإسقاط

Ox : $P\sin\alpha-F_f=m\gamma_x$ ① و Oy : $N-P\cos\alpha=0$ ②

باستعمال ① و ② و $f=\frac{F_f}{N} \Rightarrow \boxed{\gamma_x=g(\sin\alpha-f\cos\alpha)}$

ب:- نستعمل العلاقة $V^2-V_0^2=2\gamma_x\Delta x$ مع $V_0=0$ فنجد

$V=\sqrt{2g(\sin\alpha-f\cos\alpha).D} \Rightarrow \boxed{V=9,09\,m/s}$

ت:- نضيف قوة النابض ونستعمل العلاقة العامة $\boxed{VdV=\gamma_x\,dx}$

نكتب قانون نيوتن : $\boxed{P\sin\alpha-F_f-K\Delta x=m\gamma_x}$ لنجد γ_x :

$\boxed{\gamma_x=g(\sin\alpha-f\cos\alpha)-\frac{K}{m}\Delta x}$ بالتعويض والتكامل مع $V_f=0$ و Δx_{max}

$$\frac{1}{2}(\underbrace{V_f^2}_{0}-V^2)=\int_0^{\Delta x_{max}}\left[g(\sin\alpha-f\cos\alpha)-\frac{K}{m}\Delta x\right]d(\Delta x)$$

لنحصل على المعادلة :

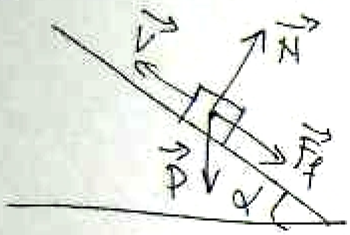
$$\boxed{(\Delta x_{max})^2-\frac{2gm}{K}(\sin\alpha-f\cos\alpha)\Delta x_{max}-\frac{m}{K}V^2=0}$$

ونجد الحل الوحيد :

$$\Delta x_{max}=\frac{gm}{K}(\sin\alpha-f\cos\alpha)+\sqrt{\frac{g^2m^2}{K^2}(\sin\alpha-f\cos\alpha)^2+\frac{m}{K}V^2}$$

نجد أن : $\boxed{\Delta x_{max} = 2,25\ m}$

ث : عند أقصى تقلص للنابض، يتمدد من جديد ليدفع الكتلة نحو الأعلى، يمكن أن نفترض أن الكتلة تعود إلى نفس السرعة الأولى عند إسترخاء النابض. وتنطلق الكتلة بسرعة V نحو الأعلى الإحتكاك يغير إتجاهه ونجد التسارع



$$\boxed{\gamma'_x = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}$$

نعيد تطبيق القانون السابق مع $V'_f = 0$

نجد في الأخير: $\Leftarrow$ $\left(V_f'^2 - V^2\right) = 2\gamma'_x D$

$$\boxed{D' = \frac{-V^2}{2\gamma'_x} = \left(\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\sin\alpha + f\cos\alpha}\right) D}$$

$$\boxed{D' = 1,047\ m}$$

جامعة قسنطينة　　　　　　　　　　　　　　　　　　مقياس(فيزياء1)

قسم الفيزياء (LMD)　　　　　　　　　　　　　　　السنة الجامعية 2013/2012

السلسلة رقم 04 : العمل والطاقة

التمرين 01: تتحرك نقطة مادية M في المستوي (Ox , Oy) تحت تأثير قوة $\vec{F}$ تتعلق بالموقع وفق العلاقة :

$\vec{F} = (y^2 - x^2)\vec{\imath} + 3xy\,\vec{\jmath}$.نعتبر النقاط $A(3,0)$, $B(4,0)$, $C(3,4)$.

أحسب عمل القوة عندما تنتقل M من O إلى C :

1- على المستقيم OC . 2- على المستقيم AO ثم CA .3- على المستقيم BO ثم BC . ما هي طبيعة القوة $\vec{F}$ ؟

التمرين 02: نقطة مادية M كتلتها m تتحرك فوق مسار دائري أملس (من دون احتكاك) نصف قطره R تحت تأثير قوة الثقل.

1- تترك النقطة M بدون سرعة ابتدائية في النقطة A (انظر الشكل 1).

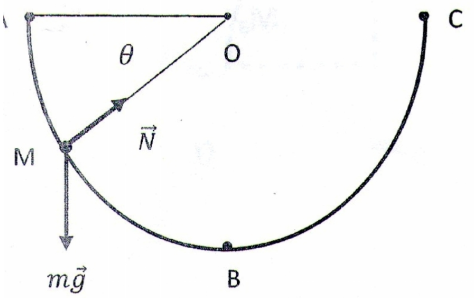
أ- حدد عند النقطة الكيفية M القوى المنتجة للعمل والقوى غير المنتجة للعمل.

ب- إذا علمت أن الانتقال العنصري في الإحداثيات القطبية يكتب من الشكل : $\overrightarrow{dl} = d\rho\overrightarrow{U_\rho} + \rho d\theta\overrightarrow{U_\theta}$ ، اكتب عبارة العمل العنصري ثم استنتج العمل المنجز بين الموقعين A و B.

ج - باستعمال نظرية الطاقة الحركية، استنتج السرعة عند النقطة B.

2- حدد القوى المحافظة ثم استنتج الطاقة الكامنة المشتقة منها.
استنتج مرة ثانية قيمة السرعة عند النقطة B باستعمال مبدأ إنحفاظ الطاقة الميكانيكية (الكلية).

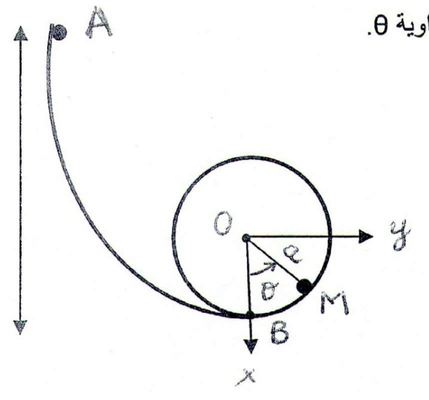
3- هل تصل M إلى النقطة C وما هي قيمة السرعة عندها.



الشكل 1:التمرين الثاني

التمرين 03: تترك كرية كتلتها m من دون سرعة ابتدائية عند نقطة A توجد على ارتفاع h من سكة موجهة وضعيتها شاقولية و تنتهي بمسار دائري نصف قطره a . حركة الكرية تتم من دون احتكاك.

1- احسب السرعة V_B عند النقطة B ثم في نقطة كيفية M من الجزء الدائري معلمة بالزاوية θ.
2- اوجد قوة رد فعل السكة في نقطة M من الجزء الدائري للموجه.
3- حدد الارتفاع الأصغر h للنقطة A لكي تأخذ الكرية حركة دائرية على الموجه.

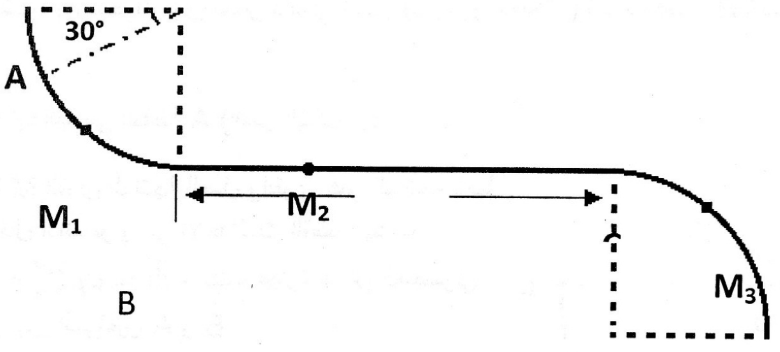


التمرين04: جسم كتلته **m** ينزلق على سطح موجه مشكل من ثلاثة أجزاء : **AB** جزء من دائرة نصف قطرها **R** ، و **BC** جزء مستقيم أفقي طوله **2R** ، و **CD** ربع آخر من دائرة لها نفس نصف القطر. ينزلق الجسم بدون احتكاك على الجزئين **AB** و **CD** و على الجزء **BC** باحتكاك معامله **f**. نترك الجسم عند النقطة **A** $(\theta = 30°, t = 0)$ بدون سرعة ابتدائية. أوجد :

1- السرعة و رد الفعل عند نقطة كيفية M_1 من الجزء **AB** ، ثم استنتج السرعة عند النقطة **B**.

2- السرعة و رد الفعل عند نقطة كيفية M_2 من الجزء **BC** ، أحسب السرعة عند النقطة **C**.

3- السرعة و رد الفعل عند نقطة كيفية M_3 من الجزء **CD** ، أوجد الزاوية التي يغادر بها الجسم هذا السطح.

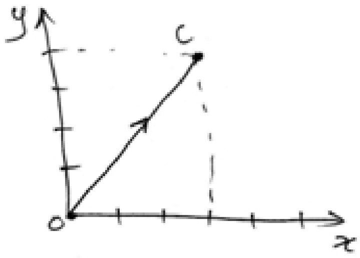


D

-التمرين الأول:

- حساب العمل حسب المسالك: $C \leftarrow O$

المسلك مستقيم معادلته $y = \frac{4}{3}x$

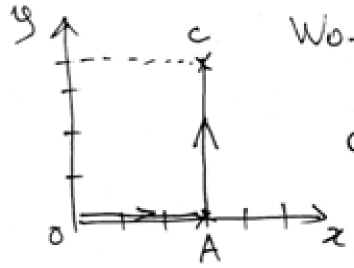


العمل العنصري يكتب: $dW = F_x dx + F_y \cdot dy$

يجب أن نكتب هذا التفاضل بدلالة متغير واحد حتى نستطيع حساب التكامل حسب معادلة المسار نكتب: $dy = \frac{4}{3}dx$ ثم نعوض

$$W_{O\to C} = \int_{x=0}^{x=3} (y^2 - x^2)\,dx + \int_{x=0}^{x=3} (3xy)\,dy = \int_0^3 \left(\frac{16}{9}x^2 - x^2\right) dx + \int 3x\cdot\left(\frac{4}{3}x\right)\cdot\frac{4}{3}dx$$

$$W_{O\to C} = \frac{7}{9}\cdot\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^3 + \frac{16}{3}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^3 = \frac{55}{9}\cdot\left(\frac{27}{3}\right) = +55$$



- حساب العمل حسب المسالك: $C \leftarrow A \leftarrow O$

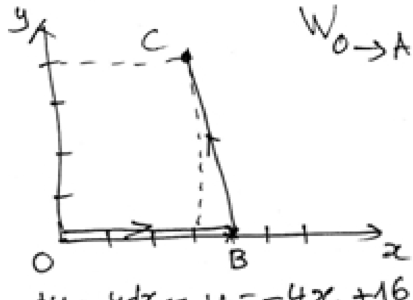
من $A \leftarrow O$: $y=0 \Rightarrow 0=dy \Rightarrow dW_{O\to A} = F_x dx$

من $C \leftarrow A$: $x=3 \Rightarrow 0=dx \Rightarrow dW_{A\to C} = F_y dy$

ويكون العمل حسب هذا المسالك

$$W_{O\to A\to C} = \int_{0,\ O\to A}^{3} F_x dx + \int_{0,\ A\to C}^{4} F_y dy = \int_{0,\ O\to A}^{3} (-x^2)\,dx + \int_{0,\ A\to C}^{4} (3\times 3y)\,dy$$

$$W_{O\to A\to C} = \left[-\frac{x^3}{3}\right]_0^3 + \left[\frac{9}{2}y^2\right]_0^4 = 72 - 9 = 63$$



- حساب العمل حسب المسالك: $C \leftarrow B \leftarrow O$

من $B \leftarrow O$: $y=0 \Rightarrow 0=dy \Rightarrow dW_{O\to B} = F_x dx$

من $C \leftarrow B$: لدينا معادلة مستقيم يمر على B و C : $y = -4x + 16 \Rightarrow dy = -4dx$

ويكون العمل حسب المسالك

$$W_{O\to B\to C} = \int_{0,\ O\to B}^{4} F_x dx + \int_{B\to C} F_x dx + \int_{B\to C} F_y dy$$

$$W_{O\to B\to C} = \int_{0}^{4}(-x^2)\,dx + \int_{B\to C}(y^2-x^2)\,dx + \int_{B\to C} 3(xy)\,dy$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}\right]_0^4 + \int_{4}^{3}\left[(-4x+16)^2-x^2\right]dx + \int_{4}^{3} 3x\left[-4x+16\right](-4dx)$$

$$= -\frac{64}{3} + \int_{4}^{3}\left[15x^2-128x+256\right]dx + \int_{4}^{3} 48\left[x^2-4x\right]dx$$

$$W_{O\to B\to C} = -\frac{64}{3} + \left[5x^3-64x^2+256x\right]_4^3 + \left[16x^3-2x^2\right]_4^3$$

$$= -\frac{64}{3} + \left[21x^3-66x^2+256x\right]_4^3 = -\left[\frac{64}{3}+571\right]$$

- نلاحظ أن الأعمال الثلاثة مختلفة نتيجة المسالك المختلفة وبالتالي فالقوة المطبقة هي قوة غير محافظة

- يمكن أن نتأكد من ذلك باستعمال المشتقات الجزئية للمركبات

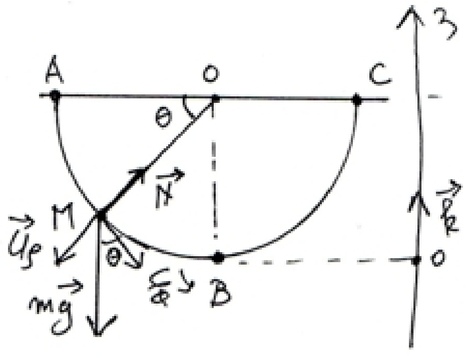
قوة محافظة $\Leftrightarrow \left\{\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}\right\} \not\Leftrightarrow$ قوة غير محافظة

نلاحظ أن:

$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 2y$ و $\frac{\partial F_y}{\partial x} = 3y$ عدم المساواة

يعني أن القوة غير محافظة

-التمرين الثاني :-



1- أ- لدينا قوة الثقل وقوة رد الفعل $\vec{N}$ تكون عمودية على المسار الدائري وهي بالتالي عمودية على السرعة : $\vec{N} \perp \vec{V}$

أي عمودية على عنصر الإنتقال: $\vec{N} \perp d\vec{l}$ فهي لا تشارك في العمل وتبقى قوة الثقل هي التي تنتج العمل أثناء الحركة .

ب- في الإحداثيات القطبية : لدينا الإنتقال: $d\vec{l} = d\rho\,\vec{u}_\rho + \rho\, d\theta\,\vec{u}_\theta$

والقوة : $\vec{F} = F_\rho \vec{u}_\rho + F_\theta \vec{u}_\theta$ ، فيكون العمل العنصري :

$$dW = \vec{F} . d\vec{l} = F_\rho\, d\rho + F_\theta . \rho\, d\theta$$

لأن المسار دائري $(\rho = R) \Leftarrow d\rho = 0$ ويصبح : $dW = F_\theta R\, d\theta$

F_θ : هي مركبة الثقل حسب $\vec{u}_\theta$ (الشكل) : $F_\theta = mg\cos\theta$

فيكون الشكل النهائي للعمل العنصري: $dW = mgR\cos\theta\, d\theta$.

والعمل الناتج بين $B \leftarrow A$ هو :

$$W_{A\to B} = \int_{\theta_A = 0}^{\theta_B = \frac{\pi}{2}} mgR\cos\theta\, d\theta$$

$$W_{A\to B} = mgR\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = mgR$$

ج- نظرية الطاقة الحركية هي :

$$W_{A\to B} = E_c(B) - E_c(A)$$

$$W_{A\to B} = \frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = \frac{1}{2}mV_B^2 \quad (V_A = 0)$$

فنحصل على السرعة :

$$V_B = \sqrt{\frac{2W_{A\to B}}{m}} = \sqrt{2gR}$$

2- القوة المحافظة هي الثقل لأنه مشتق من الطاقة الكامنة حسب المحور $\vec{Oz}$: فإن قوة الثقل تكتب : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$

يتعلق بالمتغير z فقط لذلك نكتب الطاقة الكامنة

$$\vec{P} = -\overrightarrow{grad}\, E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$$

مع $\vec{P} = -mg\vec{k}$ ، نلاحظ أن $\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$ ، $\frac{\partial E_p}{\partial y} = 0$ ، الطاقة الكامنة دالة لـ z فقط:

$$-mg\vec{k} = -\frac{dE_p}{dz}\vec{k} \Leftarrow \frac{dE_p}{dz} = mg \Leftarrow E_p(z) = \int mg\, dz$$

فنحصل على الطاقة الكامنة: $E_p(z) = mgz + C$

إذا فرضنا $E_p(0) = 0 \Leftarrow$ نجد أن $C = 0$ ومنه $\boxed{E_p(z) = mgz}$

وحسب قانون الطاقة الكامنة نجد

$$W_{A\to B} = -\left[E_p\right]_A^B = -\left[E_p(B) - E_p(A)\right] = -\left[0 - mgR\right]$$

$$\Leftarrow \boxed{W_{A\to B} = mgR}$$

- مبدأ انحفاظ الطاقة الميكانيكية: $E(A) = E(B)$

مع: $E(A) = E_c(A) + E_p(A)$ و $E(B) = E_c(B) + E_p(B)$

$E_c(A) = \frac{1}{2}mV_A^2 = 0$

$E_p(B) = mg.0 = 0$

فنجد: $E_p(A) = E_c(B) \Leftarrow m.gR = \frac{1}{2}mV_B^2$

$$\Leftarrow \boxed{V_B = \sqrt{2Rg}}$$

3 - لكي تصل النقطة إلى C : يعني أن سرعتها عند C $V(C) \geqslant 0$

نطبق مبدأ انحفاظ الطاقة بين A و C : $E(A) = E(C)$

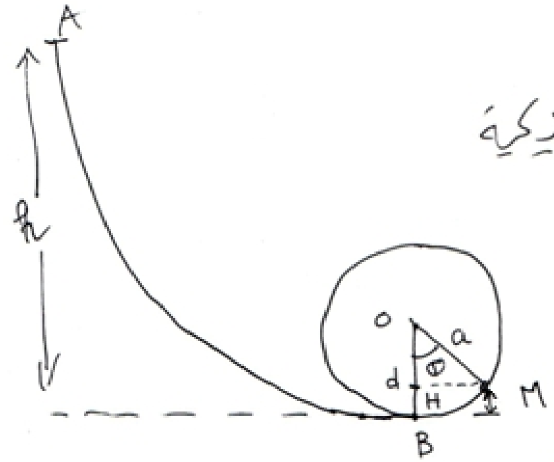
في A لدينا $3=R$ و $V(A)=0$ ، وفي C كذلك $3=R$ ومنه

$E(C)=\frac{1}{2}mV^2(C)+mgR$ ، $E(A)=mgR$ بالمساواة نجد

$V(C)=0$ وبالتالي تصل عند النقطة (C) وتنعدم سرعتها

وتعود نحو النقطة (B) .

- التمرين 03 :



1- نطبق مبدأ إنحفاظ الطاقة الميكانيكية

بين (A) و (B) : مع

$V(A)=0$ و $E_p(A)=mgh \Leftarrow E_c(A)=0$

$V(B)\neq 0$ و $E_p(B)=0$

$E(A)=E(B) \Leftarrow mgh=\frac{1}{2}mV_B^2$

فنجد :

$$\boxed{V_B=\sqrt{2gh}}$$

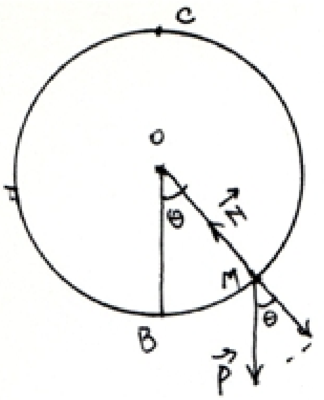
بين (B) و (M) ، حيث M تقع على إرتفاع $H=\overline{OB}-\overline{Od}$

$\overline{OB}=a$ و $\overline{Od}=a\cos\theta \Leftarrow H=a(1-\cos\theta)$

لدينا $E(M)=E(B) \Leftarrow \frac{1}{2}mV^2(M)+mgH=\frac{1}{2}mV^2(B)$

ومنه نحصل على $V(M) \Leftarrow V(M)=\sqrt{2g(h-H)}$

$$\boxed{V(M)=\sqrt{2g\left[h-a(1-\cos\theta)\right]}}$$



2- قوة رد الفعل تكون حسب نصف القطر من قانون نيوتن وبالإسقاط على $\vec{U}_N$:

$$N - P\cos\theta = m\gamma_N = m\frac{V^2}{a}$$

$$\Rightarrow N = mg\cos\theta + m\frac{V^2(M)}{a}$$

- نعوض قيمة السرعة $V(M)$ فنجد :

$$N = mg\left[3\cos\theta + \frac{2h}{a} - 2\right] \Leftarrow N = mg\cos\theta + \frac{m}{a}\cdot 2g\left[h-(1-\cos\theta)a\right]$$

3- لكي تكون حركة الكرة دائرية، يجب أن تبقى ملتصقة دائما بهذا المسار وهذا يستلزم أن رد الفعل يكون دائما غير معدوم ومنه يكون شرط الحركة الدائرية هو: $N > 0$ ، عند أعلى نقطة من المسار فنجد :

$N(C) > 0$ أي: عند $\theta = \pi$

$$N(C) = \left[\frac{2h}{a} - 5\right] \geqslant 0 \Leftarrow N(C) = \left[3\cdot(-1) + \frac{2h}{a} - 2\right] \geqslant 0 \Leftarrow$$

عندما يصل إلى (C) يجب أن تكون $N=0$ و $mg = m\frac{V_C^2}{a}$

فنجد أن $\boxed{h \geqslant \frac{5}{2}\cdot a}$ ، عند النقطة (C) النقطة تملك

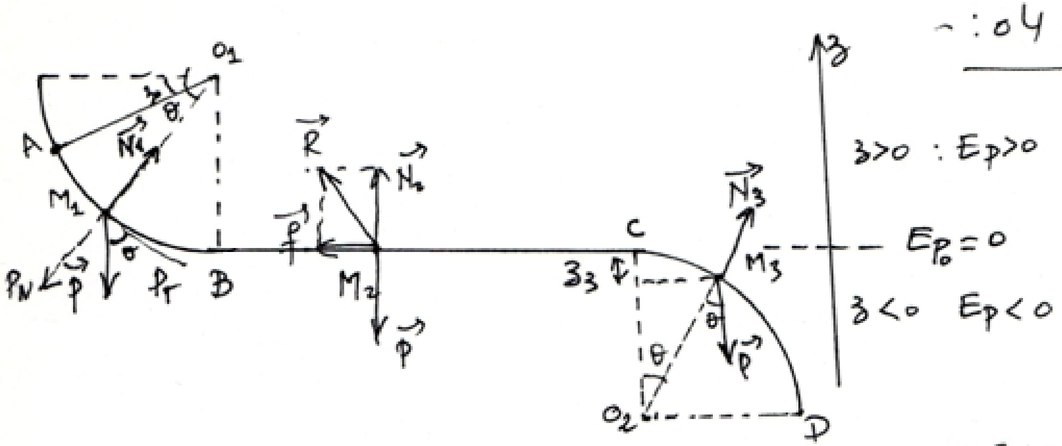
طاقة كامنة : $E_p(C) = 2amg$ و طاقة حركية : $E_c(C) = \frac{1}{2}mg\cdot a$

وتكون الطاقة الكلية : $E(C) = E_c(C) + E_p(C) = mga\left[2+\frac{1}{2}\right]$

$$= \frac{5}{2}mg\,a = mgh = E(A)$$

وهو يحقق دائما مبدأ إنحفاظ الطاقة الميكانيكية .

التمرين 04 :



1- عند النقطة M_1 يكون رد الفعل ناظمي وفي إتجاه O_1، وهو بالتالي عمودي على السرعة ولا يشارك في العمل المنجز، وتبقى قوة الثقل هي الوحيدة التي تنجز العمل

نعرف أن الثقل هو حسب المحور $\vec{Oz}$ ومن الشكل :

$\vec{P}=m\vec{g}=-mg\vec{k} \Rightarrow \vec{P}=-\vec{grad}\,E_p \Rightarrow \vec{P}=-\frac{dE_p}{dz}\vec{k} \Rightarrow \frac{dE_p}{dz}=mg$

$\Rightarrow E_p(z)=mgz+C$ ، نأخذ $E_p(0)=0 \Rightarrow C=0$ و $\boxed{E_p(z)=mgz}$

- إيجاد السرعة عند النقطة M_1، نطبق مبدأ إنحفاظ الطاقة الميكانيكية بين A و M_1 : $E(M_1)=E(A)$ ، عند النقطة A : $V(A)=0$ ومنه :

$E(A)=E_p(A)=mgh_A$ ، $h_A=R-R\sin 30 \Rightarrow h_A=R-\frac{1}{2}R=\frac{1}{2}R$

فنجد :

M_1 $\quad \frac{1}{2}mV_{M_1}^2+mgh_{M_1}=\frac{1}{2}mgR$

عند M_1 : $h_{M_1}=R(1-\sin\theta) \Rightarrow V_{M_1}^2=g(R-2h_{M_1}) \Rightarrow \boxed{V_{M_1}=\sqrt{gR(2\sin\theta-1)}}$

من قانون نيوتن وبالإسقاط على $\vec{u}_N$ نجد :

$N_1-mg\sin\theta_1=m\gamma_{N_1} \Rightarrow \gamma_{N_1}=\frac{V_{M_1}^2}{R} \Rightarrow N_1-mg\sin\theta_1=\frac{m}{R}gR(2\sin\theta_1-1)$

فنجد : $\boxed{N_1=mg\left[3\sin\theta_1-1\right]}$

عند B : $\theta_1=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{V_B=\sqrt{gR}}$ و $\boxed{N_B=2mg}$

2- في المجال BC، لدينا قوة إحتكاك. لذلك سوف نطبق قانون تغير الطاقة الميكانيكية: $\Delta E = W(\vec{f})$، عند النقطة M_2

نجد: $\boxed{E(M_2) - E(B) = \int_B^{M_2} \vec{f} \cdot d\vec{l}}$ ، قوة الإحتكاك عكس الإنتقال

وهي قوة ثابتة تساوي:

$\|\vec{f}\| = -f\|\vec{N}\|$ و $\|\vec{N}\| = mg \Leftarrow \|\vec{f}\| = -fmg$

فنجد العمل المقاوم: $W(\vec{f}) = -\overline{BM_2}\, f.mg \Rightarrow \boxed{E(M_2) - E(B) = -\overline{BM_2}\, fmg}$

عند النقطة B لدينا فقط طاقة حركية أي

$E(B) = \frac{1}{2} m V_B^2$

نجد: $E(B) = \frac{1}{2} mgR \Rightarrow \boxed{E(M_2) = \frac{1}{2} mgR - \overline{BM_2} \cdot f \cdot mg}$

عند النقطة M_2: لدينا كذلك طاقة حركية فقط أي $E(M_2) = \frac{1}{2} m V^2(M_2)$

فنجد: $\frac{1}{2} m V^2(M_2) = \frac{1}{2} mgR - \overline{BM_2} \cdot f \cdot mg \Rightarrow \boxed{V(M_2) = \sqrt{g\left[R - \overline{BM_2} \cdot f\right]}}$

عندما نصل إلى النقطة (C) تصبح السرعة:

$\boxed{V(C) = \sqrt{g\left[R - \overline{BC} \cdot f\right]}}$

يجب أن يكون: $R - \overline{BC} \cdot f \geqslant 0$

أي يجب أن تكون الطاقة الميكانيكية عند (C): $E(C) \geqslant 0$

3- عند النقطة M_3: $z_3 < 0$ والطاقة الكامنة $E_p(M_3) < 0$

نطبق مبدأ إنحفاظ الطاقة الميكانيكية بين النقطتين C و M_3

$\Leftarrow E(M_3) = E(C) \Leftarrow E(C) = E_c(C) \Leftarrow E(C) = \frac{1}{2} m V^2(C)$

$\Leftarrow \frac{1}{2} m V^2(M_3) + mgz_3 = \frac{1}{2} mg\left[R - \overline{BC} \cdot f\right]$ مع $z_3 = R\left[\cos\theta - 1\right]$

$\Leftarrow V^2(M_3) = -2gR\left[\cos\theta - 1\right] + g\left[R - \overline{BC} \cdot f\right]$

$$\boxed{V(M_3) = \sqrt{g\left[R(3 - 2\cos\theta) - \overline{BC} \cdot f\right]}}$$

باستعمال قانون نيوتن وبالإسقاط على $\vec{U_N}$: $mg\cos\theta_3 - N_3 = m\gamma_N$

ونستنتج : $N_3 = mg\cos\theta_3 - m\frac{V_{A_3}^2}{R} \Leftarrow$

$$\boxed{N_3 = mg\left[5\cos\theta_3 + \frac{\overline{BC}}{R}f - 3\right]} \Leftarrow N_3 = mg\cos\theta_3 - \frac{mg}{R}\left[R\left(3 - 2\cos\theta_3\right) - \overline{BC}\cdot f\right]$$

- يغادر الجسم السطح الدائري عندما ينعدم رد الفعل N_3 فنجد :

$$\boxed{\cos\theta_3 = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}\frac{\overline{BC}}{R}f} \Leftarrow 5\cos\theta_3 + \frac{\overline{BC}}{R}f - 3 = 0 \Leftarrow N_3 = 0$$

من الجزء الثاني $(\overline{BC})$ وجدنا أن : $R - \overline{BC}\cdot f \geqslant 0$ أي أن $\frac{\overline{BC}}{R}f \leqslant 1$

في كل الحالات نلاحظ أن $\boxed{\cos\theta_3 < \frac{3}{5}}$ وهي الحالة عندما يكون $f=0$

وتمثل أصغر زاوية يمكن أن تفارق النقطة فيها هذا السطح ، أما عندما $f\neq 0$

فإن الزاوية سوف تكون أكبر، وأكبر زاوية نحصل عليها عندما تكون

السرعة في النقطة c : $V(c)=0$ أي عندما يكون: $R - \overline{BC}\cdot f = 0$

أو $\overline{BC} = \frac{1}{f}\cdot R$ ، وعندما نعوض في علاقة الزاوية السابقة سوف نجد :

$$\boxed{\cos\theta_{max} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}} = \frac{2}{5} \Leftarrow \boxed{\cos\theta_{max} = \frac{2}{5}}$$

ويكون الشرط

العام لمفارقة الجسم السطح هو :

$$\boxed{\frac{2}{5} \leqslant \cos\theta \leqslant \frac{3}{5}}$$

من هنا نلاحظ أن الجسم لن يصل مهما كانت سرعته الابتدائية النقطة

D حيث $\theta_D = \frac{\pi}{2}$

كلما كانت السرعة $V(c)$ كبيرة كلما كانت الزاوية θ صغيرة

وكلما كانت السرعة $V(c)$ صغيرة كلما كانت الزاوية θ كبيرة وتكون

أكبر قيمة لها عندما $V(c)=0$ وهي توافقه $\cos\theta = \frac{2}{5}$

Nom du document : 2013-2012-تمارين العمل و الطاقة
Répertoire : C:\Users\user\Desktop\ملخص الميكانيك\TD
Modèle :
C:\Users\user\AppData\Roaming\Microsoft\Templates\Normal.dotm
Titre :
Sujet :
Auteur : user
Mots clés :
Commentaires :
Date de création : 25/01/2013 18:10:00
N° de révision : 6
Dernier enregistr. le : 25/01/2013 19:39:00
Dernier enregistrement par : user
Temps total d'édition : 89 Minutes
Dernière impression sur : 25/01/2013 19:40:00
Tel qu'à la dernière impression
Nombre de pages : 11
Nombre de mots : 5 (approx.)
Nombre de caractères : 29 (approx.)